Mathematische Methoden

Wintersemester 2018/19
Blatt 3, Abgabe 31.10.2018 bis 15:00

Institut für Biologische Physik
J. Berg
U. Michel, S. Kleinbölting

Aufgrund von Allerheiligen bitten wir Sie, Ihre Ausarbeitung bis Mittwoch 31.10. 15:00 einzuwerfen.
Übungsblatt 2 wird am Freitag 02.11. 10:00 in HS II in einer Globalübung besprochen.

1 Euklidisches Skalarprodukt (10 P) Seien $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ Komponenten der Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ bzgl. einer Orthonormalbasis.
In der Vorlesung wurde das euklidische Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^n$ definiert durch

$$\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} \cdot \vec{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k.$$

a) (3 P) Zeigen Sie, dass $\cdot$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ ist, d.h. die drei Eigenschaften eines Skalarprodukts erfüllt sind (sprich: positive Definitheit, Symmetrie und Bilinearität).

b) (2 P) Berechnen Sie $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, $\|\mathbf{u}\|$ und $\|\mathbf{v}\|$ für

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hier bezeichnet $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$ die induzierte Norm.

c) (2 P) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Finden Sie alle Vektoren $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, die mit $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ das Skalarprodukt $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \lambda$ haben. Für welche λ bilden diese einen Unterraum des $\mathbb{R}^2$?

d) (4 P) Welche der folgenden Beispiele definieren ein Skalarprodukt auf V? Überprüfen Sie jeweils die Bedingungen an ein Skalarprodukt.

- $V = \mathbb{R}^3, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2u_1v_1 + u_2v_2 + 5u_3v_3$
- $V = \mathbb{R}^2, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_2v_2 - u_1v_1$
- $V = \mathbb{R}^2, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + 3u_2v_2$
- $V = \mathbb{R}^2, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2u_1v_1 + u_1v_2 + 3u_2v_1 + u_2v_2$

2 Vektorprodukt (3 P) Im Gegensatz zur gewohnten Multiplikation ist das Kreuzprodukt nicht assoziativ. Prüfen Sie dies anhand der drei Vektoren

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

nach.

3 Regeln der Differenziation (10 P) Seien $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen.

a) (2 P) Leiten Sie aus der Grenzwertdefinition der Ableitung die *Produktregel* her

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Sie dürfen dabei ausnutzen, dass $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$ ist, falls beide Grenzwerte auf der rechten Seite existieren.

b) (1 P) Folgern Sie zusammen mit der (aus der Vorlesung) bekannten Kettenregel die *Quotientenregel* (für $g(x) \neq 0$)

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

c) (2 P) Zeigen Sie mithilfe der Kettenregel, dass für eine bijektive Funktion f und ihre Umkehrabbildung f^{-1} gilt

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

und berechnen Sie damit die Ableitung des natürlichen Logarithmus.

d) (3 P) Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen wo sie definiert sind:

i.)
$$f(x) = \sin\left(\frac{x_0}{x}\right), \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

ii.)
$$f(x) = \exp\left(-\frac{5}{x^2}\right)$$

iii.)
$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}$$

iv.)
$$f(x) = \ln(2x^4 + x\cos(\pi x^{1/4}))$$

v.)
$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} r\cos(\omega t) \\ r\sin(\omega t) \end{pmatrix}, \quad r, \omega \in \mathbb{R}$$

vi.)
$$f(x) = x^x$$

e) ($*$) (2 P) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrabbildung. Skizzieren Sie diese.

Hinweis: Zum Auffinden der Umkehrabbildung mag es hilfreich sein, $u = e^x$ zu substituieren.