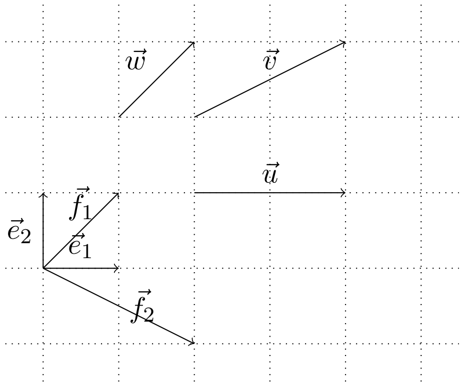
Institut für Biologische Physik
J. Berg
U. Michel, S. Kleinbölting

1 Vektoren – Reprise (5 P) Wir wollen nocheinmal den Unterschied zwischen Vektoren und ihren Komponenten beleuchten.



Sei $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ eine Orthonormalbasis: $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$ und $\|\vec{e}_i\| = 1$. Fettgedruckte Symbole bezeichnen Komponentendarstellungen bzgl. der angegebenen Basis; $\|\cdot\|$ die vom Skalarprodukt induzierte Norm.
Beantworten Sie knapp mit Begründung ob die folgenden Aussagen zutreffen. Falsche Aussagen sind zu korrigieren.

i.) $\mathcal{F} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$ bildet eine Basis.

ii.) $\mathcal{F}$ bildet eine Orthonormalbasis.

iii.) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

iv.) $\vec{e}_1 = \frac{1}{3}(\vec{f}_2 + \vec{f}_1)$.

v.) $\mathbf{e}_1^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

vi.) $\mathbf{w}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \vec{w} \cdot \vec{e}_1 \\ \vec{w} \cdot \vec{e}_2 \end{pmatrix}$

vii.) Sei ϕ der Winkel zwischen $\vec{w}$ und $\vec{e}_1$: $\mathbf{w}^{\mathcal{E}} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}$

viii.) $\mathbf{w}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} \vec{w} \cdot \vec{f}_1 \\ \vec{w} \cdot \vec{f}_2 \end{pmatrix}$

ix.) $\mathbf{v}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \|\vec{v}\| = \sqrt{5}$

x.) $\mathbf{u}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \|\vec{u}\| = \sqrt{\frac{8}{9}}$

2 Grenzwerte und die Regel von de l'Hôspital (6 P) Bei der Bestimmung von Grenzwerten hat man es öfter mit gebrochenen Funktionen $\frac{f(x)}{g(x)}$ zu tun. Nun passiert es nicht selten, dass Nenner und Zähler eines solchen Bruchs gleichzeitig gegen Null oder Unendlich gehen, wenn sich x einem Wert x_0 annähert. Man kann den Grenzwert – sofern er existiert – dann offenbar nicht durch separate Betrachtung von Nenner und Zähler ermitteln. In solchen Situationen hilft einem die *Regel von de l'Hôspital* weiter[1]: Sind f, g auf einem Intervall um x_0 differenzierbar und existiert der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c$$

dann ist dieser gleich

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = c$$

[1]deren Beweis wir der Vorlesung zur Analysis überlassen

Der Satz gilt ebenso für $x_0 \in \{-\infty, +\infty\}$.
Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte falls Sie existieren. Falls nicht, begründen Sie warum. Es sei stets $\alpha > 0$.

i.)
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4}$$

ii.)
$$\lim_{x\to\infty} \sin(x)$$

iii.)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

iv.)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}$$

v.)
$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha e^{-x}$$

vi.)
$$\lim_{x\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

3 Essay: Die Ableitung (5 P) Tragen Sie auf einer halben bis maximal einer Seite Ihr Wissen über die Ableitung zusammen! Wozu ist sie gut, wie ist sie definiert,... *Begriffe die dabei zumindest vorkommen sollten: Differenzenquotient, Differenzialquotient, Grenzwert, Steigung, Tangente, Extremstellen.*

4 Partielle Ableitungen (6 P) Bestimmen Sie die folgenden (mehrfachen) partiellen Ableitungen. Vereinfachen Sie soweit wie möglich.

i.)
$$\frac{\partial}{\partial x}(2x^5 - 5x^3y^2 + xy^4 - 3y^5)$$

und analog $\frac{\partial}{\partial y}$.

ii.)
$$\frac{\partial}{\partial x}\sin(\ln(x+y))$$

iii.)
$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\exp(-x^2 - y^2 + xy)$$

iv.)
$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\ln(xy)$$

v.)
$$\frac{\partial r(x,y,z)}{\partial x} \quad \text{mit} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

vi.)
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) r^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Verifizieren Sie in iii.) und iv.) jeweils, dass die partiellen Ableitungen nach x bzw. y vertauschen.