Institut für Biologische Physik
J. Berg
U. Michel, S. Kleinbölting

1 Taylorreihen (7 P)

Entwickeln Sie die folgenden Funktionen jeweils um den gegebenen Punkt in eine Taylorreihe. *Hinweis: Machen Sie sich in Teil ii.) und iv.) das Leben nicht zu schwer.*

i.) $\ln(1+x)$ um $x_0 = 0$.

ii.) $\exp(-x^2)$ um $x_0 = 0$.

iii.) $\frac{1}{1-x}$ um $x_0 = 0$.

iv.) $x^4 \exp(-x^2)$ um $x_0 = 0$.

v.) $x^3 + 6x^2 - x + 1$ um $x_0 = 2$.

vi.) $\sinh x \equiv \dfrac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$ um $x_0 = 0$.

vii.) $\cosh x \equiv \dfrac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$ um $x_0 = 0$.

2 Integration (13 P)

a) (7 P) Berechnen Sie die folgenden Integrale mittels den aus der Vorlesung bekannten Techniken.

i.)
$$\int_0^1 \mathrm{d}x\, x\, e^{-2x}$$

ii.)
$$\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x\, \sin(x)\cos(x)$$

iii.)
$$\int_1^2 \mathrm{d}x\, \frac{\log(x)}{x^2}$$

iv.)
$$\int \mathrm{d}x\, e^{ax}\cos(bx)$$

v.)
$$\int \mathrm{d}x \log x$$

vi.)
$$\int_0^1 \mathrm{d}x\, x\, e^{x^2}$$

vii.)
$$\int_0^x \mathrm{d}t\, |t| \qquad x \in \mathbb{R}$$

b) (1+2 P) Geben Sie
$$\int_{-a}^{a} x \cosh(x^4 + 3x^2) e^{-x^2} \mathrm{d}x$$
ohne Bestimmung der Stammfunktion an.

Fassen Sie die gemachte Beobachtung in eine allgemeine Rechenregel und beweisen Sie diese.

c) (2 P) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion und partieller Integration, dass
$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \Gamma(n+1) \equiv \int_0^\infty t^n e^{-t} \mathrm{d}t = n!$$
Hinweis: Für den Induktionsschritt ist also $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ zu zeigen. Dass $n+1$ im Argument der *Gammafunktion* steht, ist Konvention.

d) (1 P) Sei $F : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit
$$F(x) = \int_{\ln x}^{x^2} \cos(\sin(t))\mathrm{d}t$$
Bestimmen Sie die Ableitung $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}$.