Mathematische Methoden

Wintersemester 2018/19
Blatt 6, Abgabe 22.11.2018 bis 13:30

Institut für Biologische Physik
J. Berg
U. Michel, S. Kleinbölting

---

1 Integration durch Substitution (3 P) Berechnen Sie folgende Integrale:

i.)

$$\int_0^2 \mathrm{d}x \, \frac{1}{\sqrt{7-3x}}$$

ii.)

$$\int_a^b \mathrm{d}x \, x \cos(x^2+1)$$

iii.)

$$\int \mathrm{d}x \, \frac{1}{x\sqrt{4+\ln(x)^2}}$$

2 Mehrfachintegrale (4 P) Betrachten wir nun als Anwendung von Mehrfachintegralen einen Keil, dessen Breite a (in x-Richtung), Tiefe b (in $y-$Richtung) und maximale Höhe c (in $z-$Richtung) beträgt. Die Höhe z hängt dabei von x ab (s. Skizze). Die Dichte (also Masse pro Volumen) dieses Keils ist nicht homogen, sondern hängt von x, y und z ab - stellen Sie sich zum Beispiel ein Gemisch aus Sand und Kieselsteinen im Inneren vor. Hier soll die Dichte durch die Funktion

$$\rho(x,y,z) = \rho_0 \frac{(2x+3y)z^2}{V}$$

gegeben sein. Dabei ist ρ_0 eine Konstante der Einheit Masse pro Volumen und V das Volumen des Keils. Berechnen Sie die Masse M des Keils. Welches Ergebnis erhielten Sie, falls die Dichte konstant wäre, also $\rho(x,y,z) = \rho_0$ gelten würde?

3 Substitution in Mehrfachintegralen (7 P) Manche Mehrfachintegrale vereinfachen sich deutlich, wenn man eine Parametertransformation mehrerer Variablen gleichzeitig vornimmt. In der Vorlesung haben Sie Polarkoordinaten kennengelernt [1]

$$r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \phi(x,y) = \begin{cases} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & y < 0 \end{cases} \tag{1}$$

a) (3 P) Was bedeuten diese beiden Gleichung geometrisch? Argumentieren Sie, dass die von den Koordinatenlinien r, $r+\Delta r$, ϕ, $\phi+\Delta\phi$ eingeschlossene Fläche für kleine Δr und $\Delta\phi$ näherungsweise den Flächeninhalt $r\Delta r\Delta\phi$ hat.

b) (4 P) Benutzen Sie Polarkoordinaten um den Flächeninhalt der Menge

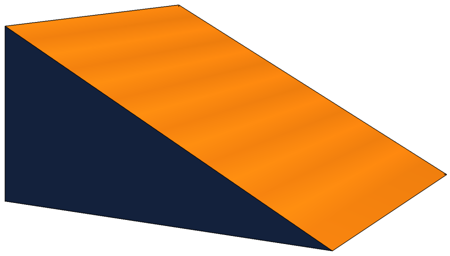
$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x^2+y^2+ax)^2 \leq a^2(x^2+y^2)\right\}$$

zu berechnen. Der Rand von C ist in untenstehender Skizze dargestellt.

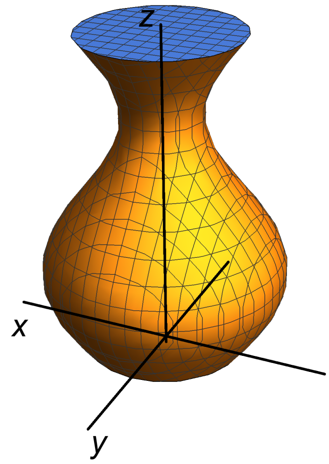
Hinweis Überlegen Sie sich die Umkehrung der Parametertransformation (1), d.h. bestimmen Sie $x(r,\phi)$ und $y(r,\phi)$. Wenn man diese in die Definitionsgleichung von C einsetzt, bekommt man eine Bedingung für die Integrationsgrenzen heraus, die besonders einfach ist, wenn man zuerst über r integriert.

---

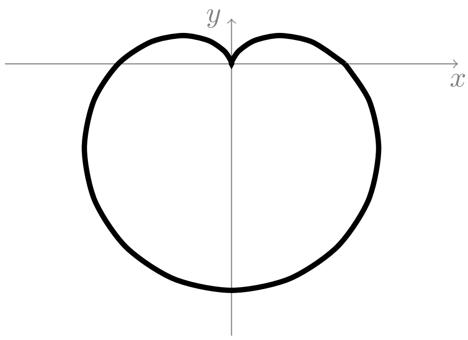
[1] Die Definition der Vorlesung über den arctan gilt nur für $x > 0$. Diese kann man mit einer ähnlichen Fallunterscheidung (mit insgesamt 5 verschiedenen Fällen) auf alle (x,y) erweitern.



(a) Ein Keil



(b) Eine Vase



(c) Rand der Menge C

Abbildung 1

4 Rotationsvolumina (6 P) Durch Hinzunahme der z-Achse entstehen aus ebenen Polarkoordinaten sogenannte *Zylinderkoordinaten* (warum werden diese so genannt?)

$$(x, y, z) \mapsto (r(x, y), \phi(x, y), z(z)),$$

Diese bieten sich bei Problemen an die symmetrisch bzgl. Rotation um eine Achse sind.

a) (1 P) Begründen Sie warum das Volumenintegral in Zylinderkoordinaten die Form

$$\int \mathrm{d}V \equiv \iiint \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$$

annimmt.

b) (3 P) Sei nun

$$K = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \leq \left(\frac{1}{2}\sin(z) + 1 \right)^2, 0 \leq z \leq 2\pi \right\}$$

die abgebildete Figur 1b.

Berechnen Sie das Volumen der Vase $\int_K \mathrm{d}V$.

c) (2 P) Wieviel Flüssigkeit muss eingefüllt werden um die Vase bis zur halben Höhe zu füllen?