

1 Gauß-Integral (4 P) Die Dichte der sogenannten Normalverteilung – landläufig auch *Gaußsche Glockenfunktion* genannt – ist in der angewandten Statistik, Wahrscheinlichkeitstheorie, statistischen Physik, Quantenmechanik, (Quanten-)feldtheorie,... allgegenwärtig.

Hier wollen wir zwei ihrer grundlegenden Eigenschaften herleiten.

a) (2 P) Zeigen Sie dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Hinweis: Quadrieren Sie das Integral und führen Polarkoordinaten ein.

b) (2 P) Nutzen Sie das Ergebnis aus a) um zu zeigen, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ax^2}{2} + bx} dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{2a}\right)$$

für $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$. Es mag hilfreich sein den Exponenten quadratisch zu ergänzen.

2 Komplexe Zahlen (12+2 P)

a) (2 P) Bestimmen Sie jeweils die kartesische Form $z = \Re(z) + i\Im(z)$, sowie die Polarform $z = re^{i\phi}$ der folgenden komplexen Zahlen:

$$u = -i(i-1), \quad v = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}i}{1 + \sqrt{3}i}, \quad w = 3(3-2i), \quad z = 2 \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right).$$

b) (3 P) Berechnen Sie $v + w$, $v - w$, vw , $\frac{z}{v}$ und z^* und v^* . Geben Sie die Lösungen in der jeweils zweckmäßigeren Form an.

c) (1 P) Finden Sie alle Lösungen von $w^3 = 1 + i$. Zeichnen Sie diese in der komplexen Zahlenebene ein.

d) (2 P) Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene:

$$U = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{2} \leq |z - i| \leq 1 \right\}, \quad V = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \arg(z - i) \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

e) (2 P) Wir können jede komplexe Zahl $u \in \mathbb{C}$ eindeutig mit einem Vektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ identifizieren. Seien $u, v \in \mathbb{C}$. Sei A die Fläche des von u, v aufgespannten Parallelograms. Zeigen Sie, dass gilt

$$u^*v = \vec{u} \cdot \vec{v} \pm iA$$

Wovon hängt das Vorzeichen des Imaginärteils ab?

f) (2 P) Wie im Reellen gilt auch für die komplexe geometrische Reihe, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

falls $|z| < 1$. *Bonus(2 P): Zeigen Sie dies!*

Finden Sie damit eine Reihendarstellung der *reellen* Funktion

$$x \mapsto \frac{1}{1 + \frac{1}{2}x^2}$$

und diskutieren Sie kurz deren Konvergenzradius.

3 Additionstheoreme (4 P) Beweisen Sie die folgenden Additionstheoreme mithilfe der *Eulerschen Formel*:

- a) (2 P) $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$
- b) (2 P) Als Verallgemeinerung des in der Vorlesung gezeigten Additionstheorems für den doppelten Winkel zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\cos(n\phi) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{k} (-1)^k \cos(\phi)^{n-2k} \sin(\phi)^{2k}$$

wobei $\lfloor x \rfloor$ die Funktion bezeichnet, die x auf die nächstkleinere ganze Zahl abrundet. *Hinweis: Binomischer Lehrsatz.*