Mathematische Methoden

Wintersemester 2018/19

Blatt 8, Abgabe 06.12.2018 bis 13:30

Institut für Biologische Physik
J. Berg
U. Michel, S. Kleinbölting

Anfangswertproblem Unter einem Anfangswertproblem versteht man eine Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ zusammen mit einer Bedingung $y(x_0) = y_0$. Gesucht ist also eine Funktion, die die Differentialgleichung sowie die Anfangsbedingung erfüllt. In diesem Zusammenhang kann man von Eindeutigkeit der Lösung sprechen. Ohne Anfangsbedingung hat eine Dgl. i.A. beliebig viele Lösungen (z.B. hat $y' = 0$ die Lösungsschar $y = \text{konstant}$).

1 Separation der Variablen (8 P)

Lösen sie die folgenden Anfangswertprobleme mit der Methode der Separation der Variablen.

a) (2 P) Unbeschränktes Wachstum $\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = \beta N(t)$ mit $N(0) = N_0 > 0$ und $\beta > 0$.

b) (2 P) Beschränktes Wachstum $\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\beta}{K} N(t)(K - N(t))$ mit $N(0) = N_0 > 0$ und $K, \beta > 0$.

Hinweis: Das Integral wird durch eine Partialbruchzerlegung wesentlich vereinfacht.

c) (2 P) Barometrische Höhenformel: $\frac{\mathrm{d}p(h)}{\mathrm{d}h} = -\frac{p(h)Mg}{R(T_0 - ah)}$ mit $p(h_0) = p_0$ und $M, g, R > 0$.

d) (2 P) Skizzieren Sie die Lösungen von a) und b) und diskutieren Sie ihr Verhalten für kleine t und $t \to \infty$. Welche Interpretation haben die Parameter β und K?

2 Variation der Konstanten (6 P)

Lösen Sie die folgenden inhomogenen Differentialgleichungen.

a) (3 P) $\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \alpha x(t) = \beta t$ für $t \geq 0$ mit $x(0) = 1$ und $\alpha, \beta > 0$.

b) (3 P) $t \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + 2y(t) = t^2 - t + 1$ für $t \geq 1$ mit $y(1) = 1$.

3 Eindeutigkeit (7 P)

Betrachten Sie das Anfangswertproblem (AWP)

$$y' = x\sqrt{y} \equiv f(x, y)\,, \quad y(x_0) = y_0$$

a) (2 P) Lösen Sie das AWP.

b) (3 P) Sei $y : I \to \mathbb{R}$ diese Lösung des AWP. Für welche Definitionsgebiete $I \equiv (a, b)$ können Sie die Eindeutigkeit der Lösung bejahen?

c) (2 P) Seien nun konkret $x_0 = 2$ und $y_0 = \frac{9}{16}$. Betrachten Sie die Funktion ($c \geq 0$ *beliebig!*)

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{16}(x^2 - 1)^2 & x \geq 1 \\ 0 & -c < x < 1 \\ \frac{1}{16}(x^2 - c^2)^2 & x \leq -c \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Funktion überall differenzierbar ist und das AWP löst. Kommentieren Sie die Tatsache, dass die Lösung offenbar nicht eindeutig ist.