**Mathematische Methoden**
Wintersemester 2018/19
Blatt 9, Abgabe 13.12.2018 bis 13:30

Institut für Biologische Physik
J. Berg
U. Michel, S. Kleinbölting

**1 Schiefer Wurf (9 P)** Ein Massepunkt der Masse $m$ wird aus der Höhe $h$ über dem Boden mit Anfangsgeschwindigkeit $\dot{\vec{r}}(0) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}(0) = v_0\vec{e}_\alpha$ geworfen. Der Einheitsvektor $\vec{e}_\alpha$ schliesst dabei mit der $x$-Achse einen Winkel $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ ein.
Unter Vernachlässigung der Reibung folgt aus den Newtonschen Bewegungsgleichungen für die Bahnkurve $\vec{r}(t)$

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \vec{F}_g = -mg\vec{e}_y.$$

**a)** (3 P) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für die angegebenen Anfangswerte. Dabei können Sie die $z$-Richtung vernachlässigen und das Problem als Bewegung in der $xy$-Ebene auffassen.

**b)** (3 P) Berechnen Sie den Auftreffpunkt auf den Boden. Betrachten Sie die Grenzfälle $h \to 0$ und $h \to \infty$. Unter welchem Winkel gelingt in diesen Grenzfällen jeweils der weiteste Wurf?

**c)** (3 P) Welcher Winkel muss bei gegebener Geschwindigkeit $v_0$ und Abwurfhöhe $h = 0$ gewählt werden, um eine Weite $x_*$ zu erreichen? Existiert die Lösung dieses *Randwertproblems* immer? Ist sie eindeutig?

**2 Fadenpendel (11 P)** Ein Massepunkt der Masse $m$ befindet sich an einem Ende eines starren, masselosen „Fadens“ der Länge $l$, dessen anderes Ende in einem Punkt fixiert ist. Die Differentialgleichung für die Bewegung des Massepunktes im Schwerefeld der Erde lautet

$$ml\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2}(t) = -mg\sin\phi(t). \tag{1}$$

Hierbei bezeichnet $\phi \in [-\pi, \pi]$ den Auslenkwinkel aus der Ruhelage.

**a)** (3 P) Fertigen Sie eine Skizze des Pendels an und nutzen Sie diese Zeichung, um die Bewegungsgleichung herzuleiten.

**b)** (1 P) Da die Differentialgleichung (1) nicht elementar lösbar ist, verwenden wir die Kleinwinkelnäherung für kleine Auslenkungen $\phi$:

$$\sin\phi \approx \phi.$$

Begründen Sie diese Näherung.

**c)** (2 P) Finden Sie die allgemeine Lösung von (1) unter der Kleinwinkelnäherung.

**d)** (2 P) Man kann die genäherte Gleichung in der Form $\mathcal{L}\phi = 0$ schreiben, wobei $\mathcal{L}$ ein linearer Differentialoperator ist. Was folgt daraus für Lösungen $\phi_1(t)$ und $\phi_2(t)$ der genäherten Gleichung? Gilt die selbe Aussage auch für Lösungen von (1)? Geben Sie $\mathcal{L}$ explizit an.

**e)** (3 P) Wie lautet die Lösung, falls das Pendel zum Zeitpunkt $t = 0$ um $\phi_0$ ausgelenkt wurde und die Anfangsgeschwindigkeit $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}(0) = 0$ ist? Berechnen Sie die Periodendauer, d.h. die kleinste Zeit $T > 0$, bei der erneut $\phi(t) = \phi_0$ gilt.