Institut für Biologische Physik
J. Berg
U. Michel, S. Kleinbölting

In der Natur sind viele Phänomene stochastisch, d.h. nicht exakt vorhersehbar sondern zufällig. Wir können zum Beispiel nicht die genaue Bahn vorhersagen, die ein Mikrometer großes Teilchen (Kolloid) in einer wässrigen Lösung beschreiben wird. Was wir aber tun können, ist Aussagen über relative Häufigkeiten von Ereignissen zu machen, wenn wir das Experiment sehr oft wiederholen. Den Grenzwert der relativen Häufigkeiten für unendlich viele Wiederholungen nennen wir Wahrscheinlichkeit. Zur Beschreibung solcher Systeme benötigen wir also Stochastik. In dieser Übung wollen wir ein paar für uns wichtige Themen rekapitulieren.

1 Kombinatorik

a) Wieviele Möglichkeiten gibt es, M durchnummerierte Teilchen anzuordnen (Permutationen)?

b) Wieviele Möglichkeiten gibt es, M unterscheidbare (d.h. durchnummerierte) Teilchen ohne Doppelbelegung auf $N \geq M$ Plätze zu verteilen?

c) Wieviele Möglichkeiten gibt es, M nicht-unterscheidbare Teilchen ohne Doppelbelegung auf $N \geq M$ Plätze zu verteilen?

d) Wieviele Möglichkeiten gibt es, M nicht-unterscheidbare Teilchen auf $N \leq M$ Kisten zu verteilen? (Mehrfachbelegung und leere Kisten sind erlaubt)

2 Wahrscheinlichkeitsverteilingen Wir bezeichnen mit der *Zufallsvariable* X eine Größe, die zufällige Werte aus einem Zustandsraum Ω annimmt. Dies könnten zum Beispiel Messungen der Position eines Teilchens sein. Wir betrachten zwei Fälle:
i) $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots\}$ ist abzählbar (endlich oder unendlich)
Mit p_i oder $p(x_i)$ bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit, dass Zustand i angenommen wird:

$$p_i = p(x_i) = \mathrm{Wkeit}(X = x_i).$$

Aus der Definition mittels der relativen Häufigkeiten folgt dann direkt: $p_i \geq 0$ und $\sum_i p_i = 1$. Wir nennen $\{p_i\}$ eine *diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung.*
ii) $\Omega = \mathbb{R}^d$. Hier sei die Wahrscheinlichkeit, dass X sich in einem Volumen V befindet, gegeben durch:

$$\mathrm{Wkeit}(X \in V) = \int_V p(\mathbf{x}) \mathrm{d}^d x.$$

Die Funktion $p(\mathbf{x})$ nennen wir die *Wahrscheinlichkeitsdichte* und sagen X ist *absolutstetig* verteilt mit Dichte $p(\mathbf{x})$. Zum Beispiel für $d = 1$ sieht man oft die Notation: $p(x)\mathrm{d}x = \mathrm{Wkeit}(X \in [x, x + \mathrm{d}x))$. Aus der Definition mittels der relativen Häufigkeiten folgt dann: $p(\mathbf{x}) \geq 0$ (bis auf isolierte Punkte) und $\int_{\mathbb{R}^d} p(\mathbf{x}) \mathrm{d}^d x = 1$.
Wir definieren weiter den *Erwartungswert* als

$$\langle X \rangle = \sum_i p_i x_i, \quad \text{bzw.} \quad \langle X \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{x} p(\mathbf{x}) \mathrm{d}^d x$$

und die *Varianz*, welche ein Maß für die Streuung der Verteilung ist, als

$$\mathrm{Var}(X) = \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle$$

a) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der Binomialverteilung mit

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{für} \quad k = 0, 1, \ldots, n; n \in \mathbb{N}, p \in (0,1)$$

b) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der Poisson-Verteilung mit

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \text{für} \quad k \in \mathbb{N}_0, \lambda > 0$$

c) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der Normalverteilung mit Dichte

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad \text{für} \quad x, \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$$

d) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der Exponentialverteilung mit Dichte

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{für} \quad x > 0, \lambda > 0$$

3 Das schwache Gesetz der großen Zahl Wir betrachten nun eine Kollektion von Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ mit diskreten Verteilungen $p_1(x_i), p_2(x_i), \ldots$ bzw. Dichten $p_1(x), p_2(x), \ldots$ und betrachten den Vektor der gemeinsamen Zufallsvariable $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_N)$ mit $N \in \mathbb{N}$. Wir sagen, die Zufallsvariablen sind *unabhängig*, falls die Verteilung von $\mathbf{X}$ faktorisiert, d.h. falls im diskreten Fall gilt

$$\text{Wkeit}(\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)) = p_1(x_1) p_2(x_2) \ldots p_N(x_N),$$

bzw. im absolutstetigen Fall für die Dichte der gemeinsamen Verteilung:

$$p((x_1, x_2, \ldots, x_N)) = p_1(x_1) p_2(x_2) \ldots p_N(x_N)$$

a) Zeigen Sie, dass für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt: $\text{Var}(a(X+b)) = a^2 \text{Var}(X)$.

b) Zeigen Sie, dass für unabhängige Zufallsvariablen mit endlichen Varianzen gilt:

$$\left\langle \sum_{i=1}^N X_i \right\rangle = \sum_{i=1}^N \langle X_i \rangle \quad \text{und} \quad \text{Var}\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) = \sum_{i=1}^N \text{Var}(X_i)$$

(die erste Gleichung gilt auch ohne Unabhängigkeit der Variablen).

c) Wir nehmen nun zusätzlich zur Unabhängigkeit an, dass alle Zufallsvariablen den gleichen Erwartungswert μ und die gleiche Varianz σ^2 haben. Nutzen Sie Aufgabenteile a) und b) um zu zeigen, dass das arithmetische Mittel gegen den Erwartungswert konvergiert, d.h.

$$\left\langle \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i - \mu \right) \right\rangle = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{N \to \infty} \text{Var}\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i - \mu \right) = 0$$