Statistische Physik
Wintersemester 2019/20
Blatt 2, Abgabe 23.10.2019 bis 10:00

Institut für Biologische Physik
J. Berg
U. Michel, S. Kleinbölting

---

1 Die Gamma-Funktion (10 P) Die Gamma-Funktion ist Bestandteil vieler Rechnungen, unter anderem in der statistischen Physik. Sie ist eine Verallgemeinerung der Fakultät für komplexe Argumente. Wir werden sie später bei der Berechung von Volumina wiedertreffen. In dieser Aufgabe überprüfen wir, dass sich die Gamma-Funktion für natürliche Argumente tatsächlich zur bekannten Fakultät reduziert.
Sie ist wie folgt definiert:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \mathrm{d}t e^{-t} t^{z-1},$$

für $z \in \mathbb{C}$, $\Re(z) > 0$.

a) (5 P) Zeigen Sie mittels partieller Integration, dass gilt: $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

b) (5 P) Zeigen Sie $\Gamma(1) = 1$ und damit $\Gamma(n+1) = n!$ für $n \in \mathbb{N}$.

c) (10 P) Zeigen Sie mit Hilfe des Gauß-Integrals, dass $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ und somit $\Gamma(n+1/2) = (2n-1)!!/2^n\sqrt{\pi}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dabei haben wir $(2n-1)!!$ definiert als das Produkt aller positiven ungeraden Zahlen kleiner gleich $2n-1$: $(2n-1)!! = [2n-1][2(n-1)-1][2(n-2)-1]\ldots 1$

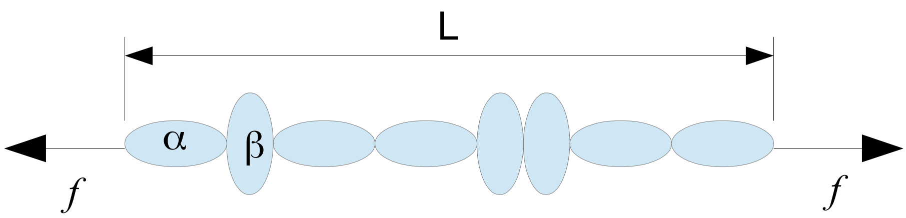

Abbildung 1: Kette aus ovalen Moelkülen in zwei möglichen Konfigurationen

2 Kette aus ovalen Molekülen (20 P) Wir betrachten eine (sehr lange) eindimensionale Kette aus N Molekülen, welche sich in zwei Konfigurationen α und β befinden können und die in der jeweiligen Konfiguration eine Länge a, bzw. b haben (siehe Abbildung 1).

a) (5 P) Zeigen Sie, dass die Entropie der Kette in Abhängigkeit von der Gesamtlänge L gegeben ist durch:

$$S(L) = N \ln N - n_\alpha \ln n_\alpha - n_\beta \ln n_\beta$$

wobei $n_\alpha = (L - bN)/(a-b)$ die Zahl der Moleküle im Zustand α bezeichet, bzw. $n_\beta = (L - aN)/(b-a)$ die Zahl der Moleküle im Zustand β (auch diese beiden Ausdrücke sind zu zeigen).

Hinweis: Nutzen Sie die Sirling-Formel für $n_\alpha \gg 1, n_\beta \gg 1$. Dabei dürfen Sie ignorieren, dass die Anzahl der Moleküle in den einzelnen Konfigurationen nur natürliche Zahlen annehmen kann.

b) (5 P) Das Verhältnis aus der Spannungskraft am Ende der Kette, f, die nötig ist um die Kette auf der Länge L festzuhalten, und der Temperatur, T, lässt sich mittels $f/T = \mathrm{d}S/\mathrm{d}L$ berechnen (mechanisches Gleichgewicht, vgl. das Gas im Kolben aus der Vorlesung mit $p \,\widehat{=}\, f, V \,\widehat{=}\, L$). Zeigen Sie, dass gilt:

$$f/T = -\frac{1}{a-b} \ln \left\{ -\frac{L-bN}{L-aN} \right\}$$

c) (10 P) Berechnen Sie die Länge L_0, bei der die Spannungskraft verschwindet. Entwickeln Sie dann die Spannungskraft $f(L)$ bis zur ersten Ordnung um L_0. Zeigen Sie, dass gilt:

$$f(L_0 + \Delta L) = -\frac{4T}{N(a-b)^2} \Delta L + \mathcal{O}(\Delta L^2)$$

Wir finden also das Hook'sche Gesetz, und haben damit eine *entropische Feder*!