Institut für Biologische Physik
J. Berg
U. Michel, S. Kleinbölting

1 Volumina hochdimensionaler Objekte (16 P) In der Vorlesung wurde zur Herleitung der Zustandsgleichungen des idealen Gases das Volumen einer $(3N \gg 1)$-dimensionalen Kugel benutzt. Hier werden wir diesen Ausdruck herleiten.

Dies ist auch von allgemeinem Interesse, denn Systeme in der statistischen Physik haben quasi per Definition einen hochdimensionalen Konfigurations- bzw. Phasenraum, da sie aus vielen Teilchen bestehen. Um Mikrozustände abzuzählen müssen wir daher oft hochdimensionale Volumina berechnen. Im $n-$dimensionalen Raum ist das Volumen eines Gebiets $\mathcal{D}$ definiert durch

$$V(\mathcal{D}) = \int_{\mathcal{D}} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n$$

wobei über das Gebiet $\mathcal{D}$ integriert wird. Zur Veranschaulichung könnte es hilfreich sein, sich das Gebiet $\mathcal{D}$ jeweils für $n = 2$ zu skizzieren.

a) (6 P) Zeigen Sie, dass das Volumen $I_n(1)$ eines n-dimensionalen Einheits-Simplex, definiert durch $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i \leq 1 \text{ und } x_i \geq 0\}$, gegeben ist durch:

$$I_n(1) = \frac{1}{n!}$$

Hinweis: Sei $I_n(L)$ der Simplex definiert durch $\sum_{i=1}^n x_i \leq L$ und $x_i \geq 0$. Zeigen Sie, dass $I_n(L) = I_n(1)L^n$. Beweisen Sie, mit Hilfe der Beziehung $I_n(L) = \int_0^L \mathrm{d}x_1 I_{n-1}(L - x_1)$, die Rekursionsrelation $I_n(1) = I_{n-1}(1)/n$. Hieraus erhält man dann die Formel für $I_n(1)$ durch Induktion.

b) (6 P) Zeigen Sie, dass das Volumen $V_n(1)$ der n-dimensionalen Einheitssphäre, definiert durch $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leq 1\}$, gegeben ist durch

$$V_{2k}(1) = \frac{\pi^k}{k!} \quad \text{und} \quad V_{2k+1}(1) = \frac{2^{k+1}\pi^k}{(2k+1)!!}$$

für $k \in \mathbb{N}$. Wir erinnern hier an die Definition von $(2k + 1)!!$ als das Produkt aller ungeraden Zahlen kleiner gleich $(2k + 1)$.

Nutzen Sie die Gamma-Funktion um beide Ausdrücke zu

$$V_n(1) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$$

zusammenzufassen.

Hinweis: Sei $V_n(R)$ das Volumen der Sphäre mit Radius R, definiert durch $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leq R^2$, dann gilt $V_n(R) = R^n V_n(1)$. Beweisen Sie, mit Hilfe der Beziehung $V_n(R) = \int_{x_1^2+x_2^2 \leq R^2} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 V_{n-2}\left(\sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}\right)$, die Rekursionsrelation $V_n(1) = (2\pi/n)V_{n-2}(1)$. Hieraus erhält man dann die Formeln für $V_n(1)$. Es könnte hilfreich sein, Polarkoordinaten zu verwenden.

c) (4 P) Erläutern Sie die Aussage dass "sich fast das gesamte Volumen an der Oberfläche befindet" falls $n \gg 1$. Betrachten Sie dazu eine dünne Kugelschale.

2 Das ultra-relativistische Gas (mikrokanonisch) (14 P) Der Ausdruck $E = 1/(2m)\,\|\mathbf{p}\|^2$ für die kinetische Energie eines Körpers ist der Grenzfall der allgemeingültigen, relativistischen Relation[1]

$$E = c\sqrt{\|\mathbf{p}\|^2 + m^2c^2}$$

falls $\|\mathbf{p}\| \ll mc$; also für Geschwindigkeiten weit unterhalb der Lichtgeschwindigkeit.

Masselose Teilchen hingegen erfüllen dementsprechend die Energie-Impuls-Relation

$$E = c\,\|\mathbf{p}\|$$

Wir wollen hier die Zustandsgleichungen eines Gases aus solchen ultra-relativistischen Teilchen herleiten[2]

Wir benötigen folgendes Integral

$$F_N(R) = \int\limits_{0 \le \sum |x_i| \le R} \left(\prod_{i=1}^{N} x_i^2\right) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_N \tag{1}$$

a) (3 P) Zeigen Sie dass $F_N(R) = C_N R^\alpha$ wobei C_N nur von N abhängt. Wie lautet α?

b) (4 P) Um C_N zu bestimmen, bedienen wir uns eines Tricks. Zeigen Sie, dass $\int_0^\infty e^{-r} r^2 \mathrm{d}r = 2$ und nutzen Sie dies um C_N zu berechnen.

Tipp: Betrachten Sie das Integral zur N-ten Potenz und nutzen aus dass (per Definition)

$$\left(\prod_{i=1}^{N} x_i^2\right) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_N = \mathrm{d}F_N$$

Damit haben wir alle Zutaten zusammen.

c) (4 P) Stellen Sie die Formel für das Phasenraumvolumen von N masselosen Teilchen mit Gesamtenergie E, die auf ein Volumen V im dreidimensionalen Raum eingeschränkt sind, bis auf Integration über die Impulse auf. Bringen Sie das verbleibende Integral auf die Form (1) und werten es aus.

d) (3 P) Bestimmen Sie die kalorische und thermische Zustandsgleichung des Systems und diskutieren kurz Unterschiede und Gemeinsamkeiten zum nicht-relativistischen Gas.

[1] c ist die Lichtgeschwindigkeit, die wir im folgenden auf $c = 1$ setzen.

[2] Wobei wir an dieser Stelle den Quanten-Charakter von z.B. Photonen fürs Erste vernachlässigen.

3 Entropische Kräfte (10 P) Rekapitulieren Sie die Vorlesung zum Thema entropische Kräfte. Schreiben Sie eine (möglichst prägnante, aber kohärente) Zusammenfassung. Ihr Essay sollte (mindestens) folgende Fragen beantworten:

- Wie berechnet sich eine entropische Kraft aus der Entropie?
- Wie stehen diese Kräfte im Zusammenhang mit der mechanischen Definition von Kräften als Gradient eines Potentials?
- Insbesondere wieso
$$T\frac{\partial S}{\partial \lambda} = \left\langle -\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle$$
gilt.
- Nennen Sie mehrere Beispiele für entropische Kräfte.