Statistische Physik

Wintersemester 2019/20
Blatt 4, Abgabe 06.11.19 bis 14:00

Institut für Biologische Physik
J. Berg
U. Michel, S. Kleinbölting

---

1 Differentiale (25 P) In der Vorlesung wurde der Begriff des *(totalen) Differentials* eingeführt. Das totale Differential einer Funktion wird in beliebigen Koordinaten x^i durch

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\, \mathrm{d}x^i$$

erklärt.

Ein allgemeines Differential hat die Gestalt

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x^1, x^2, \dots x^n)\mathrm{d}x^i$$

Wir verwenden meist die Einstein'sche Summenkonvention und unterdrücken das Summenzeichen.

- Ein Differential ω heißt *exakt* oder *total* falls es eine Funktion Ω gibt, so dass $\mathrm{d}\Omega = \omega$.
- Ein Differential $\omega = \omega_i \mathrm{d}x^i$ heißt *geschlossen* falls

$$\forall 1 \leq i, j \leq n : \quad \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i}$$

Differentiale sind die natürlichen Objekte zur Integration längs Wegen. Man definiert das Integral eines Differentials $\omega = \omega_i(x)\mathrm{d}x^i$ längs $\gamma : \ [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ als

$$\int_\gamma \omega := \int_0^1 \omega_i(\gamma(t)) \frac{\mathrm{d}\gamma^i}{\mathrm{d}t}\, \mathrm{d}t$$

Soweit nicht anders angegeben, betrachten wir im Folgenden Funktionen und Differentiale die auf einem *sternförmigen Gebiet* (Aufgabe: Schauen Sie die Definition nach) definiert sind.

a) Lesen Sie den Text "Differentialformen für die Thermodynamik" von Prof. Hermann Karcher, Uni Bonn, einschliesslich des Abschnitts "Kurvenintegrale von Differentialformen".

`http://www.math.uni-bonn.de/people/karcher/ThermodynamikDiffFormen.pdf`

b) (9 P) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind i.) $\omega = \omega_i \mathrm{d}x^i$ ist exakt.

ii.) Das Kurvenintegral

$$\oint_\gamma \omega = 0$$

verschwindet längs jedes geschlossenen Weges.

iii.) ω ist geschlossen.

Hinweis: Um "iii.) $\Rightarrow$ i.)" zu zeigen, betrachten Sie das Differential der Funktion[1]

$$\Omega(x) = \sum_{i=0}^{n} x^i \int_0^1 \omega_i(tx)dt$$

Um "ii.) $\Rightarrow$ iii.)" zu zeigen, integrieren Sie entlang des Randes eines infinitesimalen Rechtecks in der $x^i - x^j$-Ebene.

c) (5 P) Dass Exaktheit – also die Existenz einer Stammfunktion – aus Geschlossenheit folgt, ist Ihnen in drei Dimensionen im Kontext der Vektoranalysis schon begegnet. Übersetzen Sie die Begriffe 'exakt', 'geschlossen', 'Stammfunktion' in die Begriffe der Vektoranalysis.

Warum ist das Kalkül mit Differentialen fundamentaler als die Vektoranalysis?

d) (8 P) Sie handeln mit Aktien eines Unternehmens an der Börse. Die momentane Zahl der Aktien in Ihrem Besitz sei N. Der Geldfluss (genauer: die Geldflussform) bei einem Preis p pro Aktie ist entsprechend

$$G = p\mathrm{d}N$$

Betrachten Sie das untenstehende Diagramm. In welche Richtung müssen Sie den Prozess von An- und Verkauf durchlaufen um Gewinn zu erzielen? Wie berechnet sich die pro Zyklus geflossene Geldmenge und wie findet sich diese geometrisch im Diagramm wieder?

Bestimmen Sie einen sogenannten *integrierenden Faktor* des Differentials G, d.h. eine Funktion $f(p, N)$ so dass fG exakt ist. Kennen Sie einen integrierenden Faktor in der Thermodynamik?

[1] Sternförmigkeit garantiert die Existenz dieser Funktion.

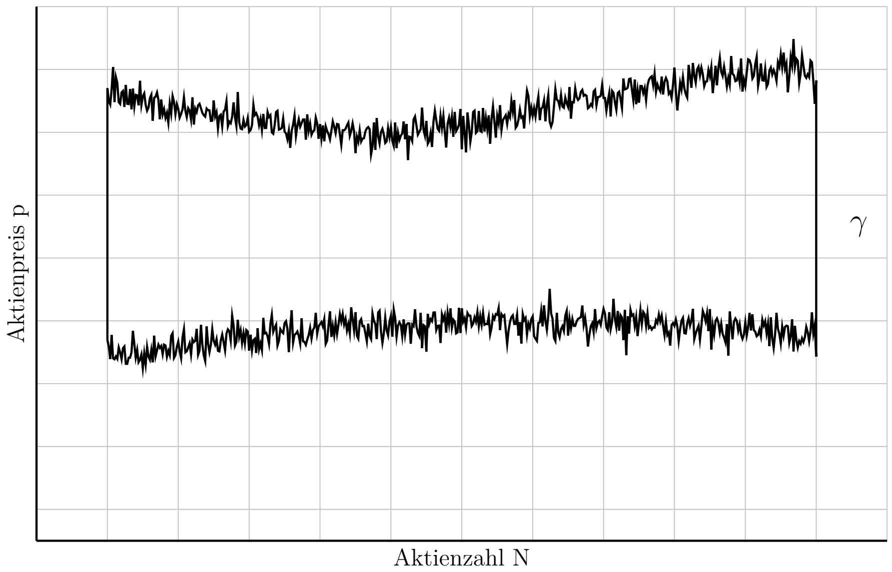

Abbildung 1: Änderung der Zustandsgrößen am Aktienmarkt.

2 Isothermer Gasprozess (15 P) Ein ideales Gas befindet sich in einem Container mit variablem Volumen V. Durch ein äußeres Wärmebad wird die Temperatur festgelegt und während des Prozesses konstant gehalten (der Prozess läuft *isotherm* ab).

Berechnen Sie die verrichtete Arbeit, wenn das Gas quasistatisch von einem Volumen V_1 auf ein Volumen V_2 komprimiert wird. Nutzen Sie $\Delta W = F_{ext}\Delta x = -p\Delta V$.

Wieviel Wärme δQ fliesst dabei, und wohin?

Wie ändert sich die Entropie des Gases bei diesem Prozess?