

1 Adiabatischer Gasprozess (13 P) In dieser Aufgabe betrachten wir die quasistatische adiabatische Volumenänderung eines idealen Gases, d.h. eine Volumenänderung ohne den Fluss von Wärme (realisiert z.B. indem das Gas in dicke Schichten von Styropor eingehüllt wird). In Blatt 4 Aufgabe 2 hatten wir die isotherme Volumenänderung betrachtet. Diese beiden Prozesse, quasistatisch isotherm und quasistatisch adiabatisch, stellen sich als fundamental für die Thermodynamik heraus: reversible Prozesse sind immer quasistatisch und entweder isotherm oder adiabatisch, bzw. jeder reversible Prozess lässt sich in eine Abfolge quasistatischer isothermer und adiabatischer Prozesse zerlegen.

- a) (3 P) Das ideale Gas ist durch die kalorische Zustandsgleichung $E = \frac{3}{2}k_BNT$ und die thermische Zustandsgleichung $pV = k_BNT$ beschrieben. Nutzen Sie $\delta Q = dE - \delta W = dE + pdV \stackrel{!}{=} 0$ sowie das Differential der thermischen Zustandsgleichung um

$$\frac{5}{3} \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0 \quad (1)$$

herzuleiten. Hinweis: Wenn Sie mit Differentialen noch nicht sattelfest sind, betrachten sie statt des Differentials dV eine kleine Änderung ΔV .

- b) (4 P) Integrieren Sie (1) um zu zeigen, dass für einen adiabatischen Prozess und das ideale Gas die sogenannte Adiabatengleichung gilt $V^\gamma p = \text{const.}$, und damit $V_2^\gamma p_2 = V_1^\gamma p_1$ wobei V_1, p_1 Volumen und Druck zu Beginn des Prozesses sind und $\gamma = 5/3$.
- c) (3 P) Nutzen Sie dieses Ergebnis, um zu zeigen, dass die Arbeit die verrichtet wird um das Volumen des Gases von V_1 quasistatisch adiabatisch zu V_2 zu ändern gleich

$$W = [V_2 p_2 - V_1 p_1] / (1 - \gamma)$$

ist.

- d) (3 P) Wie ändert sich die Entropie des Gases bei diesem Prozess? Geben Sie erst das Ergebnis an und überprüfen Sie dies mit der Sackur-Tetrode-Gleichung.

2 Freie Expansion (8 P) Das ideale Gas ist eine nützliche Näherung an das Verhalten realer Gase. Insbesondere werden dabei Wechselwirkungen zwischen den Gasmolekülen vernachlässigt. In Realität kommt es zwischen Gasteilchen je nach deren Entfernung zu elektrostatischer Anziehung bzw. Abstossung.

- a) (3 P) Argumentieren Sie auf dieser Grundlage, warum die innere Energie eines realen Gases im Allgemeinen nicht bloß von der Temperatur, sondern auch vom Volumen abhängt.

Ein Gas (nicht unbedingt ideal) befindet sich in einem isolierten Container. Durch eine unbewegliche, isolierende Trennwand ist es von einem Vakuum getrennt.

Nun wird die Trennwand plötzlich entfernt und das Gas darf in das volle Volumen expandieren.

- b) (2 P) Ist dieser Prozess quasistatisch, adiabatisch oder isentrop¹?
- c) (3 P) Ist dieser Prozess im Allgemeinen isotherm? Können Sie mittels eines Thermometers durch einen solchen Expansionsversuchs feststellen, ob sich ein Gas ideal verhält?

3 Was soll der Käse? (6 P) In dieser Aufgabe möchten wir mit den Methoden der Thermodynamik ein allgemein bekanntes Paradoxon der Schweizer Käsologie auflösen. Für allgemeine, löchrige Käse ist bekannt, dass

- i) Je mehr Käse, desto mehr Löcher
ii) Je mehr Löcher, desto weniger Käse

Verbindet man diese beiden Aussagen, so erhält man den scheinbaren Widerspruch

- iii) Je mehr Käse, desto weniger Käse ζ
- a) (3 P) Bringen Sie die Größen Gesamtvolumen V , Käsevolumen K , Lochanzahl N , Lochgröße L in einen sinnvollen Zusammenhang. Was ist unter Lochdichte n zu verstehen und wie steht diese im Zusammenhang zu den anderen Größen? Wir nehmen hierbei an, dass Löcher immer in der selben Größe L vorkommen
- b) (3 P) Beschreiben Sie nun die Ausdrücke i), ii) durch partielle Ableitungen. Welche Variablen müssen jeweils konstant gehalten werden? Berechnen Sie diese. Warum lassen sich die beiden Ausdrücke i) und ii) nicht mehr zu dem Widerspruch iii) verbinden?

¹Isentrop bedeutet mit konstanter Entropie. Adiabatisch bedeutet ohne Wärmefluss.

4 Adiabatenkoeffizient (13 P) In dieser Übung wollen wir dem Faktor $5/3$ aus Aufgabe 1 noch etwas Näher kommen. Dabei üben wir gleich den Umgang mit Differentialen.

Wir definieren durch

$$C_x = T \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_x$$

die *Wärmekapazität bei konstanter Variablen x* (Volumen, Druck, Entropie, ...).

Wir benötigen hier die Wärmekapazitäten bei konstantem Volumen (isochor) C_V und bei konstantem Druck (isobar) C_p . Wir betrachten also im Folgenden T und V bzw. T und p als unabhängige thermodynamische Variablen.

Betrachten Sie ein ideales Gas.

- a) (3 P) Um C_V zu bestimmen, stellen Sie die Differentiale von $E(T, V)$ und $S(T, V)$ auf, und leiten her, dass

$$T \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_V = \left. \frac{\partial E}{\partial T} \right|_V$$

ist.

- b) (6 P) Zur Herleitung von C_p nutzen Sie die thermische Zustandsgleichung des idealen Gases um $V(p, T)$ und damit dV zu bestimmen.

Zwischenergebnis: $C_p = C_V + Nk_B$

- c) (4 P) Leiten Sie unter der Adiabatenbedingung $dS = 0$ die Gleichung

$$0 = C_V \frac{dT}{T} + (C_p - C_V) \frac{dV}{V}$$

her und bestimmen durch Vergleich mit Aufgabe 1 und mithilfe der thermischen Zustandsgleichung den Adiabatenkoeffizienten eines idealen Gases

$$\gamma \equiv \frac{C_p}{C_V} = \frac{5}{3}$$