Institut für Biologische Physik
J. Berg
U. Michel, S. Kleinbölting

1 Universalität des Carnot-Prozesses (25 P) In der Vorlesung haben wir den Carnot-Prozess kennengelernt, eine spezielle Folge von adiabatischen und isothermen Zustandsänderungen:

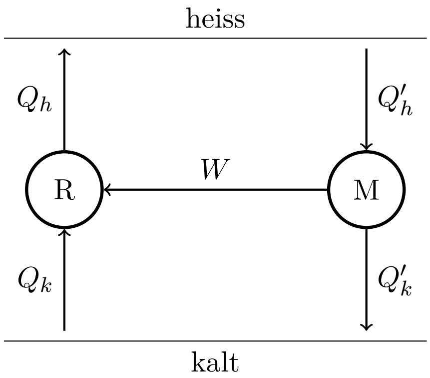
i.) Isotherme Expansion $V_1 \to V_2$ bei T_1

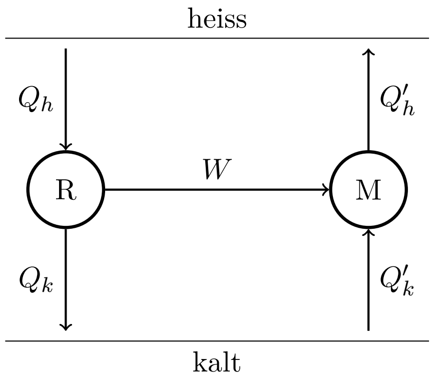
ii.) Adiabatische Expansion $V_2 \to V_3$ wobei $T_1 \to T_2$

iii.) Isotherme Kompression $V_3 \to V_4$ bei T_2

iv.) Adiabatische Kompression $V_4 \to V_1$ wobei $T_2 \to T_1$

In dieser Aufgabe wollen wir zum einen herleiten, dass der Carnot-Prozess den bestmöglichen Wirkungsgrad besitzt und dass zum anderen alle reversiblen Kreisprozesse den gleichen, optimalen Wirkungsgrad haben.





Auf den vorherigen Aufgabenblättern haben wir die Isothermen und Adiabaten des idealen Gases kennengelernt.

a) (5 P) Skizzieren Sie den Carnot-Prozess sowohl in einem p-V– als auch in einem S-T–Diagramm.

b) (5 P) Berechnen Sie anhand der bekannten Zustandsgleichungen explizit die in einem Zyklus geleistete Arbeit W als Funktion der Temperaturen und Volumina.

c) (7 P) Berechnen Sie die in einem Zyklus aufgenommene Wärme Q_1 als Funktion der Temperaturen und Volumina und zeigen, dass der Wirkungsgrad der Carnot-Maschine tatsächlich $\eta_C \equiv \frac{W}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ ist.

Hinweis: Hierzu sollten Sie am besten zuerst mithilfe der Zustandsgleichungen zeigen, dass

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$$

d) (3 P) Wie hätten Sie dieses Ergebnis auch einfacher aus dem S-T-Diagramm erhalten können?

e) (5 P) Betrachten Sie den abgebildeten Kreisprozess bestehend aus zwei Wärmereservoirs unterschiedlicher Temperatur und zwei Maschinen.

Maschine R arbeitet reversibel, während M dies vorerst nicht muss. In der linken Abbildung setzt Maschine M Wärme aus dem heißen Reservoir in Arbeit um und treibt damit Maschine R an.

Folgern Sie aus dem zweiten Hauptsatz (die Formulierung von Clausius ist hier nützlich), dass der Wirkungsgrad der Maschine M kleiner oder gleich dem von R ist:

$$\eta_M \leq \eta_R$$

Folgern Sie, dass keine Maschine einen höheren Wirkungsgrad als die Carnot-Maschine hat.

Nun arbeite auch M reversibel. Betrachten Sie den umgekehrten Prozess im rechten Bild und rechnen nach, dass nun $\eta_R \leq \eta_M$ ist. Folgern Sie, dass alle reversibel arbeitenden Maschinen den Carnot-Wirkungsgrad besitzen.

2 Eulersche Kettenregel (15 P)

Die Eulersche Kettenregel *ist ein nützliches Werkzeug um Ausdrücke in der Thermodynamik zu vereinfachen und Identitäten zu beweisen. Grund hierfür ist, dass man sich in der Thermodynamik häufig in drei Dimensionen bewegt, um ein System zu beschreiben. Allerdings sind diese Variablen typischerweise durch Zustandsgleichungen miteinander verknüpft. Interessante Größen ergeben sich meist durch Bilden partieller Ableitungen wobei unterschiedliche Parameter konstant gehalten werden sollen. Mithilfe der Eulerschen Kettenregel ergeben sich nützliche Identitäten.*

Im Folgenden seien X, Y, Z drei physikalische Größen eines Systems, das der Bedingung $f(X, Y, Z) = 0$ genügt. Zum Beispiel kann man sich hier die thermische Zustandsgleichung eines Idealen Gases für P, V, T vorstellen.

a) (2 P) Rekapitulieren Sie Umkehrregel (Inversenregel) für Ableitungen.

Warum gilt

$$\left.\frac{\partial X}{\partial Y}\right|_Z = \frac{1}{\left.\frac{\partial Y}{\partial X}\right|_Z} \;?$$

b) (7 P) Zeigen Sie die Eulersche Kettenregel:

$$\left.\frac{\partial X}{\partial Y}\right|_Z \cdot \left.\frac{\partial Z}{\partial X}\right|_Y \cdot \left.\frac{\partial Y}{\partial Z}\right|_X = -1$$

Hinweis: Es könnte nützlich sein, den Satz über implizite Funktionen anzuwenden, um die Existenz der Darstellungen $X = g_X(Y, Z)$, $Y = g_Y(X, Z)$ und $Z = g_Z(X, Y)$ zu erhalten.

c) (2 P) In der Vorlesung haben Sie für einen externen Parameter λ die entropische Kraft $F_\lambda = T \left.\frac{\partial S}{\partial \lambda}\right|_E$ kennen gelernt.

Nutzen Sie die Eulersche Kettenregel, um den Ausdruck $\left.\frac{\partial E}{\partial \lambda}\right|_S$ soweit wie möglich zu vereinfachen.

d) (4 P) Zeigen Sie mit Hilfe der Eulerschen Kettenregel, dass

$$\frac{C_p}{C_V} = \frac{\frac{\partial P}{\partial V}\Big|_S}{\frac{\partial P}{\partial V}\Big|_T}$$

gilt, wobei $C_V = T\,\frac{\partial S}{\partial T}\Big|_V$ und $C_p = T\,\frac{\partial S}{\partial T}\Big|_P$ die Wärmekapazitäten bei konstantem Volumen, bzw. konstantem Druck bezeichnen.

Hinweis: Wenden Sie die Eulersche Kettenregel auf Zähler und Nenner an. Sie müssen außerdem die Umkehrregel benutzen.

Bemerkung: Die Notation $\left(\frac{\partial X}{\partial Y}\right)_Z$ ist eine verkürzte Schreibweise für $\frac{\partial X(Y,Z)}{\partial Y}$.