Prof. Dr. B. Maier Prof. Dr. J. Berg Konzept: Prof. Dr. A. Schadschneider

Vorkurs Physik: Übung 2

Sommersemester 2018 `www.thp.uni-koeln.de/~skleinbo/vorkurs18`

5. Umkehrfunktion

a) Bestimme die Umkehrfunktion von

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

zeichnerisch. Wie lautet die Umkehrfunktion explizit? Zeige durch Nachrechnen, dass $f^{-1} \circ f(x) = x$ und $f \circ f^{-1}(x) = x$.

b) In welchen Definitions- und Wertebereichen ist die Funktion

$$f(x) = x^2 + bx + c$$

umkehrbar und wie lautet dort die Umkehrfunktion? Hierbei seien $b, c \in \mathbb{R}$.

6. Stetigkeit

Untersuchen Sie anhand der Graphen folgende Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit:

1) $$f(x) = \begin{cases} -x & \text{für } x < 1 \\ x^3 - x^2 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

2) $$f(x) = \begin{cases} -x & \text{für } x < 1 \\ x^3 - 2x^2 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

7. Zusatzaufgabe: Definition des Grenzwerts

Eine Folge (a_n) heißt *konvergent* gegen einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, wenn gilt

$$\forall_{\delta>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{n>N} : |a_n - a| < \delta\ .$$

Man schreibt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Ein Folge heißt *divergent*, wenn sie nicht konvergent ist.

a) Machen Sie sich anschaulich klar, was diese Definition bedeutet!

b) Zeigen Sie mit obiger Definition:

(i) Die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ konvergiert mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(ii) Die Folge $a_n = q^n$ konvergiert für $0 \leq q < 1$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Anleitung: Suchen Sie zu einem beliebigen $\delta > 0$ eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ (abhängig von δ), so dass Sie zeigen können, dass für ein beliebiges $n > N$ der „Abstand“ $|a_n - a| < \delta$ wird.

(iii) Die Folge $a_n = n$ ist divergent.

Anleitung: Zeigen Sie für beliebiges $a \in \mathbb{R}$, dass Sie z.B. für $\delta = 1$ zu jedem $N \in \mathbb{N}$ ein $n > N$ finden, dass gerade $|a_n - a| \geq \delta$ wird. Eine Folge (a_n) ist also divergent, wenn gilt: $\forall_{a\in\mathbb{R}}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{N\in\mathbb{N}}\ \exists_{n>N} : |a_n - a| \geq \delta$.