Vorkurs Physik: Übung 4

1. Komponenten

Gegeben sei eine Orthonormalbasis $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ eines euklidischen Vektorraums V.
a) Wie lauten die Basisvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ in Komponentendarstellung bzgl. B?
b) Zeigen Sie, dass die Komponenten eines Vektors $\vec{a} \in V$ bzgl. B durch $a_i = \vec{e}_i \cdot \vec{a}$ bestimmt sind $(i = 1, 2, 3)$.

2. Skalarprodukte

a) Sei B eine Orthonormalbasis eines dreidimensionalen euklidischen Vektorraums. Berechnen Sie alle Skalarprodukte zwischen den Vektoren

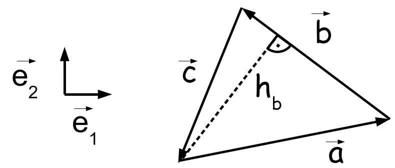
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_B \quad , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_B \quad \text{und} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_B$$

b) Berechnen Sie die Länge der Vektoren aus Teil a) und die Winkel zwischen ihnen.
c) Berechnen Sie die Komponente von $\vec{b}$ parallel zu $\vec{a}$, d.h. $\vec{b}_{\|,a}$, und die senkrecht zu $\vec{a}$, d.h. $\vec{b}_{\perp,a}$.
d) Zwei Vektoren der Länge 2 schließen den Winkel 60° ein. Berechnen Sie ihr Skalarprodukt.

3. Dreieck

Ein Dreieck sei durch zwei seiner Seitenvektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}_B$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9/2 \end{pmatrix}_B$ gegeben.
B ist die Orthonormalbasis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.

a) Wie lang sind die drei Seiten?
b) Wie groß sind die drei Winkel?
c) Wie lang ist die Höhe h_b?

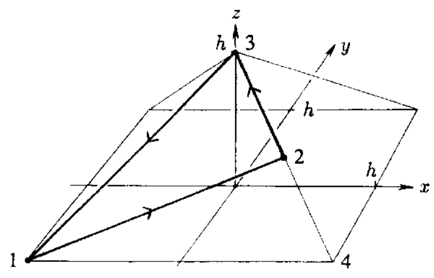


4. Distributivgesetz

Interpretieren Sie das Distributiv-Gesetz für das Skalarprodukt, $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$, geometrisch! Verifizieren Sie es in Komponenten-Darstellung!

Bitte wenden

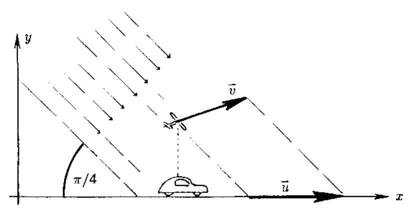
5. Anwendung - Cheopspyramide



Ein Tourist erklettert die Cheops-Pyramide (Höhe h, quadratische Grundfläche mit Kantenlänge 2h) zunächst von Punkt 1 nach Punkt 2 (welcher auf halber Höhe liegt) und von dort weiter zum Gipfel 3. Er kehrt dann direkt nach 1 zurück. Bei einer gleichmäßigen Geschwindigkeit von 22m/Minute benötigt er insgesamt 28 Minuten. Wie hoch ist die Pyramide?

(*Hinweis: schreiben Sie Ortsvektoren der drei Punkte in Komponentendarstellung, bilden Sie dann* $\vec{r}_{12}$ *u.s.w.. Zu Zahlenwerten geht man erst möglichst spät über. Trigonometrie ist noch nicht bekannt!*)

6. Anwendung - startendes Flugzeug (optional)



Auf der Rückfahrt vom Flughafen bleiben wir mit 120 km/h genau unter einer startenden Maschine, während ihr Schatten (bei Sonnenlicht-Einfall unter 45°) mit 170 km/h über die Straße gleitet. Welche Geschwindigkeit hat das Flugzeug? Wieviele Meter gewinnt es pro Sekunde an Höhe? (erst Formeln, Zahlen zuletzt; Trigonometrie verboten)