Vorkurs Physik: Übung 7

Sommersemester 2018 www.thp.uni-koeln.de/∼skleinbo/vorkurs18

1. Matrixoperationen

Gegeben seien folgende Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

a) Welche Produkte zwischen je zwei dieser Matrizen lassen sich durchführen (AB, AC, etc.)?
b) Berechnen Sie alle möglichen Produkte von a), sowie auch der Produkt: $CBAB - 3CB$.

2. Inverse Abbildung

Sei V ein zweidimensionales Vektorraum mit Basis B. Abbildung $A : V \to V$ sei durch die Abbildungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}_{BB} \qquad \text{gegeben und} \qquad A\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_B \quad , \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_{BB} \quad .$$

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix der inversen Abbildung A^{-1} mit Hilfe der Definition $A^{-1}A = I$ (I - Identitätsmatrix). Überprüfen Sie Ihr Ergebnis und danach bestimmen Sie Vektor $\vec{x}$.

3. Drehmatrizen - 3D

Die Drehung eines Vektors um 90° (gegen den Uhrzeigersinn, um den Koordinatenursprung) um die z-Achse ($\vec{e}_z$) wird entsprechend der Formel $\mathbb{D}_{z,\phi} = (d_{ik})_{z,\phi} = \begin{pmatrix} cos\phi & -sin\phi & 0 \\ sin\phi & cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ durch die Matrix $\mathbb{D}_{z,90^\circ} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dargestellt.

a) Verifzieren Sie dies, indem Sie den gedrehten Vektor $\vec{e}_x{}' = \mathbb{D}_{z,90^\circ}\vec{e}_x$, und entsprechend $\vec{e}_y{}'$ und $\vec{e}_z{}'$ berechnen.

b) Tun Sie dasselbe für die 90°-Drehung um die x-Achse, $\mathbb{D}_{x,90^\circ} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Berechen Sie die Matrizen, die einer Drehung von 90° zunächst um die z-, dann um die x-Achse ($\mathbb{D}_{x,90^\circ}\mathbb{D}_{z,90^\circ}$), und umgekehrt ($\mathbb{D}_{z,90^\circ}\mathbb{D}_{x,90^\circ}$) entsprechen. Verifizieren Sie das Ergebnis, indem Sie die Wirkung dieser Drehungen auf $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ berechnen und mit der Drehung eines Buches entsprechend der Vorführung aus der Vorlesung vergleichen.

4. Ein kleiner Ausblick - Spinmatrizen

Den Spin eines Teilchens kann man sich als *inneren* Drehimpuls $\vec{S}$ vorstellen. Für ein Teilchen mit Spin 1/2 (Elektronen, Protonen, Neutronen) findet man bei der Messung der Komponente dieses Drehimpulses entlang irgendeiner vorgegebenen (Quantisierungs-)Achse immer nur entweder den Wert $+\hbar/2$ (*spin up*) oder $-\hbar/2$ (*spin down*). ($\hbar = 1.05457 \cdot 10^{-34}$ Js)
Wir wählen die z-Achse als Quantisierungsachse und beschreiben ein Teilchen mit *spin up* als Vektor $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und mit *spin down* als Vektor $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Jedes andere Teilchen lässt sich jetzt als Vektor $\vec{\chi} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ in dieser Basis schreiben (wobei a, b orts- und zeitabhängig sein könnten, was aber im folgenden vernachlässigt wird).
Die Komponenten von $\vec{S}$ können dann als Abbildungsmatrizen (Operatoren) in folgender Form geschrieben werden:
$\hat{s}_x = \hbar/2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{s}_y = \hbar/2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, und $\hat{s}_z = \hbar/2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Der Erwartungswert, also der Mittelwert einer physikalischen Grösse $\hat{F}$ eines Teilchens $\vec{\chi}$ bei mehrmaligem Messen, ergibt sich in diesem Bild aus:

$$\langle \hat{F} \rangle = \frac{(a\ b)\,\hat{F} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}{a^2+b^2}$$

a) Verdeutlichen Sie sich dies, indem Sie den Erwartungswert des Spins in z-Richtung für die Teilchen $\vec{\alpha}$ und $\vec{\beta}$ berechnen.
b) Was gilt für $\langle \hat{s}_z \rangle$ für ein beliebiges Teilchen $\vec{\chi}$? Was bedeutet das anschaulich?
c) Berechnen Sie $\langle \hat{s}_x \rangle$ für ein beliebiges Teilchen $\vec{\chi}$. Was gilt also für die Teilchen $\vec{\alpha}$ und $\vec{\beta}$?
d) Zeigen Sie, dass $\hat{s}_x \hat{s}_y + \hat{s}_y \hat{s}_x = \hat{0}$.