
Vorkurs Physik: Übung 12

Sommersemester 2018

www.thp.uni-koeln.de/~skleinbo/vorkurs18

22. Monotonie und Ableitung

Sei $I :=]a, b[$ und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige und differenzierbare Funktion. Dann gilt

- a) $(\forall t \in I : f'(t) = 0) \Leftrightarrow f$ ist konstant
- b) $(\forall t \in I : f'(t) \geq 0) \Leftrightarrow f$ ist monoton wachsend
- c) $(\forall t \in I : f'(t) > 0) \Rightarrow f$ ist streng monoton wachsend

Für monoton fallende Funktionen lassen sich b) und c) analog formulieren. Zeigen Sie jeweils zu a) und b) die „ \Leftarrow “-Richtung und finden Sie zu c) ein Gegenbeispiel dafür, dass „ \Leftarrow “ nicht gilt.

23. Kurvendiskussion

Untersuchen Sie folgende Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ für beliebiges $a \in \mathbb{R}^+$ auf Nullstellen, Polstellen, Maxima, Wendepunkte und Asymptotik (d.h. das Fernverhalten von f für $x \rightarrow \pm\infty$). Fertigen Sie für $a = 1$ eine Skizze der jeweiligen Graphen an.

- a) $f(x) = 2x^4 - 8x^2$
- b) $f(x) = x + \frac{a}{x}$
- c) Die Fermi-Funktion: $f(x) = \frac{1}{e^{ax} + 1}$
- d) Die Bose-Funktion: $f(x) = \frac{1}{e^{ax} - 1}$

24. Unbestimmte Integrale

Überprüfe die folgenden Gleichungen:

$$(1) \quad \int \frac{2dx}{(x+1)^2} = \frac{x-1}{x+1}$$

$$(2) \quad \int \ln(x)dx = x \ln(x) - x$$

25. Zusatzaufgabe: Grenzwerte von Funktionen, Stetigkeit

Die Definition des Grenzwertes (Aufgabe 7, 2. Übung) kann folgendermaßen auf Funktionen erweitert werden:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g \in \mathbb{R} \quad \text{falls für alle Folgen } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } \lim_{x \rightarrow x_0} x_n = x_0 \text{ gilt: } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_n) = g$$

In Worten: Für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die gegen x_0 konvergiert, konvergiert die Folge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ der Bilder gegen g .

Hiermit kann man nun die Stetigkeit definieren:

$$f \text{ stetig an der Stelle } x_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

In Worten: Der Grenzwert der Funktion an der Stelle x_0 stimmt mit dem Funktionswert überein.

a) Zeige für die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$:

$$(i) : \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1, \quad (ii) : \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ existiert nicht.}$$

b) Zeige, dass die in der Vorlesung eingeführte Heaviside'sche Sprungfunktion $\Theta(x)$ bei $x = 0$ nicht stetig ist.