
Vorkurs Physik: Übung 13

Sommersemester 2018

www.thp.uni-koeln.de/~skleinbo/vorkurs18

26. Integrale

Berechne die folgenden Integrale:

$$\begin{array}{lll} 1) \int_0^1 \sum_{i=0}^N a_i x^i dx & 2) \int_1^{a^2} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad (a > 0) & 3) \int_0^1 x^2 e^x dx \\ 4) \int \sin x \cos x dx & 5) \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx & 6) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \end{array}$$

27. Zusatzaufgabe: Integrationsregeln

Zeige folgende nützliche Identitäten:

$$1) \int_a^b f(\alpha x) dx = \frac{1}{\alpha} \int_{\alpha a}^{\alpha b} f(x) dx \quad 2) \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = -\frac{1}{f(x)} \quad 3) \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x)$$

28. Zusatzaufgabe: Substitutionsregel

Berechne die folgenden Integrale mit Hilfe der Substitutionsregel:

$$\begin{array}{ll} 1) \int_0^1 (5x - 4)^3 dx & 2) \int_1^2 \ln(ax) dx \\ 3) \int \sin(2\pi x) dx & 4) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan(x) dx \end{array}$$

29. Imaginäre Zahlen

a) Vereinfache mit Hilfe der imaginären Einheit i :

$$a) \sqrt{4-7} \quad b) \sqrt{-144} \quad c) \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{-4}} \quad d) \sqrt{4(-25)}$$

b) Berechne:

$$a) i^8 \quad b) i^{15} \quad c) i^{45} \quad d) (-i)^3 \quad e) i^{-2}$$

30. Komplexe Zahlen

Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = 3 + 2i$ und $z_2 = 3i - 2$.

- a) Gebe jeweils den Real- und Imaginärteil an!
- b) Stelle die Zahlen in der komplexen Ebene dar!
- c) Bestimme die Beträge und die komplex-konjugierten Zahlen!
- d) Berechne die Summe und das Produkt der beiden Zahlen!
- e) Bestimme den Real- und Imaginärteil von $\frac{z_1}{z_2}$!

31. Komplexe Zahlen II

- a) Zeigen Sie, dass Real- und Imaginärteil von $z = x + iy$ wie folgt erhalten werden können:

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + z^*}{2} \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - z^*}{2i} .$$

- b) Berechnen Sie $(2 + 2i)^2 + (2 - 2i)^2$ und $\frac{(-2+3i)^2}{4-4i}$.
- c) Bestimmen Sie für $z = 1 + \sqrt{3} i$ die reellen Zahlen a und φ so, dass $z = a \exp(i\varphi)$.
- d) Finden Sie alle Werte von $\sqrt[5]{-1}$.
- e) Nun betrachten wir zwei komplexe Zahlen $z_k = x_k + iy_k$ mit $k = 1, 2$. Zeigen Sie, dass
 - 1. $(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*$,
 - 2. $(z_1/z_2)^* = z_1^*/z_2^*$,
 - 3. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

32. Zusatzaufgabe: Komplexe trigonometrische Funktionen

Die trigonometrische Funktionen können durch die Exponentialfunktion mit komplexen Argumenten dargestellt werden:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{und} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} .$$

Zeigen Sie mit Hilfe dieser Darstellung, dass:

- a) $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$.
- b) $\sin z = -i \sinh(iz)$ bzw. $\cos z = \cosh(iz)$.
- c) $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$. (Formel von MOIVRE)

Finden Sie ausgehend von c) eine Formel für $\cos 2\alpha$ bzw. $\sin 2\alpha$ sowie $\cos 3\alpha$ bzw. $\sin 3\alpha$.