Andreas Schadschneider

Vorkurs für Physik

Version: 25. März 2014

Sommersemester 2014

Vorbemerkungen

Die Vorlesung wendet sich an alle Studienanfänger der Naturwissenschaften, nicht nur an zukünftige Physik-Studierende. Sie dient im wesentlichen dazu, die notwendige Mathematik aus der Schule zu wiederholen. Für diejenigen, die einen Mathematik-Leistungskurs besucht haben, dürfte die Vorlesung thematisch kaum Neues bieten. Trotzdem ist allen Studienanfängern die Teilnahme empfohlen, zum Auffüllen von Lücken und auch zur Vorbereitung auf die Arbeitsweise im Studium. Zusätzlich zur Vorlesung werden begleitende Übungen angeboten, in der die wesentlichen Techniken eingeübt werden sollen.
Die Vorlesung richtet sich nicht nach einem speziellen Buch. Zur Ergänzung bieten sich - je nach Studienziel - verschiedene Bücher an. Grundsätzlich ist es ratsam, sich Bücher zunächst in einer der Bibliotheken oder im Fachhandel anzuschauen. Die Geschmäcker sind nun mal verschieden!

- Für Physiker:

  S. Großmann: *Mathematischer Einführungskurs für die Physik* (Teubner)
  Dieses Buch ist für alle Physikstudenten zu empfehlen. Es ist allerdings in einigen Dingen (z.B. Notation) gewöhnungsbedürftig.

  C.B. Lang, N. Pucker: *Mathematische Methoden in der Physik* (Spektrum)
  Ein neueres Lehrbuch, das alle Themen der Vorlesung umfasst. Enthält auch zahlreiche Übungsaufgaben mit Lösungen. (Preis: ca. 45 Euro)

  H. Schulz: *Physik mit Bleistift: Das analytische Handwerkszeug der Naturwissenschaftler* (Verlag Harri Deutsch) Alle wichtigen mathematischen Hilfsmittel, die in den ersten Semestern benötigt werden, werden an Hand von physikalischen Fragestellungen eingeführt.

  T. Arens, F. Hettlich, C. Karpfinger, U. Kockelkorn, K. Lichtenegger, H. Stachel: *Mathematik* (Spektrum Verlag)
  Eine Empfehlung der Studierenden! Sehr umfangreiches Mathematik-Buch, das sich aber auch um die Anschauung bemüht. (Preis: ca. 70 Euro)

  H. Fischer, G. Kaul: *Mathematik für Physiker* (Teubner)
  Dieses zweiteilige Werk ist eher wie ein Mathematik-Lehrbuch aufgebaut. Es enthält viele nützliche Resultate und kann auch als Nachschlagewerk dienen.

- Für Chemiker, Biologen, etc. gibt es zahlreiche Bücher mit Titeln wie „Mathematik für Naturwissenschaftler“ etc., z.B. das Buch von W. Pavel und R. Winkler (Pearson). Teilweise beschäftigen sich diese Bücher aber vor allem mit fortgeschrittenerer Mathematik, daher sollte man erst einen Blick hinein werfen oder die Empfehlungen der entsprechenden Begleitvorlesungen abwarten.

Für Fehlermeldungen und Verbesserungsvorschläge bin ich jederzeit dankbar. Sie können auch per email an mich (`as@thp.uni-koeln.de`) geschickt werden.

Andreas Schadschneider

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Analysis

Kapitel I

Funktionen

I.1 Grundlagen und Beispiele

In der Physik werden häufig verschiedene Meßwerte einander zugeordnet. Wir wollen dies am Beispiel der Messung der zurückgelegten Wegstrecke s bei einer Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit v illustrieren.

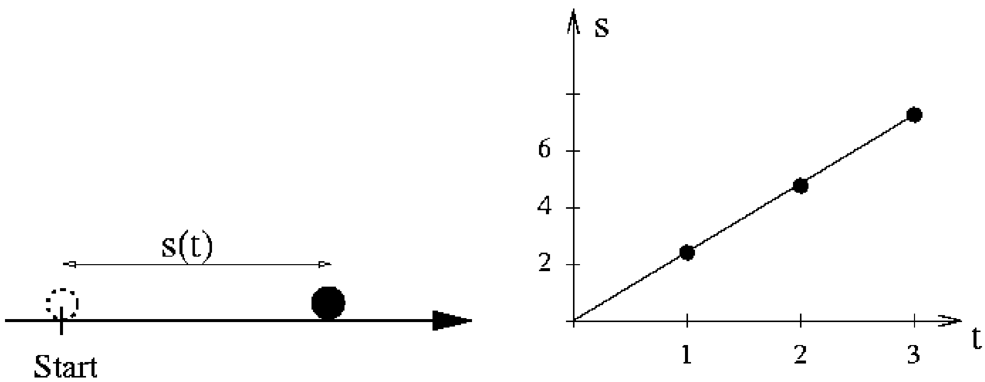

Abbildung I.1.1: Links: Ein Ball bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit v. Es wird gemessen, welche Strecke $s(t)$ er in der Zeit t zurückgelegt hat. Rechts: Graphische Darstellung der Messergebnisse.

Somit kann man folgende abstrakte mathematische Definition einer Funktion ageben:
Wird jedem Element x aus einer Menge A eindeutig ein Element y aus einer Menge B zugeordnet (Abb. I.1.2), so nennt man diese Zuordnung eine **Funktion** f (oder **Abbildung von** A **nach** B). Die Menge A bezeichnet man dann als den **Definitionsbereich** von f, die Menge B als den **Wertebereich** oder **Zielbereich**. Man schreibt auch

$$f : A \to B\,, \quad x \mapsto y = f(x) \tag{I.1.1}$$

d.h. dem Element $x \in A$ wird das Element $y \in B$ zugeordnet. Dies bezeichnet man dann als $f(x)$, um die Zuordnung zu x hervorzuheben.

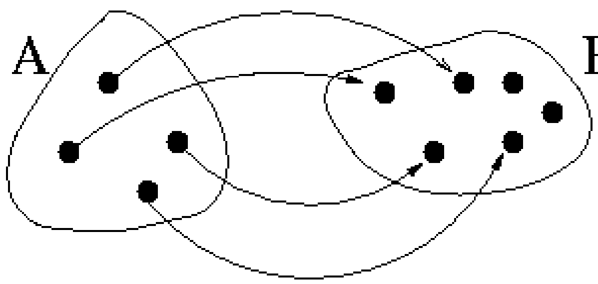

Abbildung I.1.2: Beispiel für eine Funktion. Jedem Element des Definitionsbereichs A wird ein Element des Wertebereichs B zugeordnet.

Bemerkungen:

1. Definitions- und Wertebereich gehören mit zur Definition einer Funktion und müssen daher immer mit angegeben werden, sofern ihre Definition nicht aus dem Zusammenhang klar wird.

2. x und/oder $f(x)$ können auch Vektoren sein!

3. Statt $y = f(x)$ schreibt man oft auch einfach $y = y(x)$. Die Schreibweise $y(x)$ soll andeuten, dass man in der Physik häufig nicht zwischen der Funktion f (also der Zuordnungsvorschrift) und der abhängigen Variablen y unterscheidet.

Definitions- und Zielmenge können im Prinzip ganz abstrakte Mengen sein. In der Physik haben wir es aber in der Regel mit Mengen von Zahlen zu tun. Wichtige **Zahlenmengen** sind:

$$\begin{aligned}
\text{natürliche Zahlen:} \quad & \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}\,, \text{und} \ \ \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}\,, \\
\text{ganze Zahlen:} \quad & \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}\,, \\
\text{rationale Zahlen:} \quad & \mathbb{Q} = \left\{ \frac{z}{n} \Big| z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}\,.
\end{aligned}$$

Später werden wir noch die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ kennenlernen. Bei den näturlichen Zahlen ist zu beachten, dass die Definition nicht immer einheitlich ist. Manchmal wird auch die Menge $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ als Menge der natürlichen Zahlen definiert.
Eine wichtige Rolle spielen auch **Intervalle**, d.h. zusammenhängende Teilmengen der reellen Zahlen. Man unterscheidet **geschlossene**, **offene** und **halboffene** Intervalle:

$$\begin{aligned}
[a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \big| a \le x \le b\} \\
]a, b[&= \{x \in \mathbb{R} \big| a < x < b\} \\
[a, b[&= \{x \in \mathbb{R} \big| a \le x < b\} \\
]a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \big| a < x \le b\}\,.
\end{aligned}$$

Auch hier ist die Notation nicht immer einheitlich. So schreibt man manchmal (a, b) für $]a, b[$. Außerdem kommen folgende Mengen häufiger vor:

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^+ &= \{x \in \mathbb{R} \big| x > 0\} =]0, \infty[\\
\mathbb{R}^- &= \{x \in \mathbb{R} \big| x < 0\} =]-\infty, 0[\\
\mathbb{R}_0^+ &= \{x \in \mathbb{R} \big| x \leq 0\} = [0, \infty[\\
\mathbb{R}_0^- &= \{x \in \mathbb{R} \big| x \geq 0\} =]-\infty, 0] \\
\mathbb{R} \setminus \{a\} &= \{x \in \mathbb{R} \big| x \neq a\} .
\end{aligned}$$

Wir halten fest, dass sich Funktionen auf verschiedene Arten und Weisen

I.2 Eigenschaften

Im vorigen Abschnitt haben wir gesehen, dass sich Funktionen $f : A \to B$ auf verschiedene Arten und Weisen charakterisieren lassen, z.B. durch

- Formulierung der Zuordnung in Worten
- Wertetabellen (also eine Liste mit Paaren $(x.f(x))$)
- graphische Darstellung (siehe Abb. I.1.2)
- Mengenbilder (siehe Abb. I.1.1)
- eine Rechenvorschrift (z.B. $f(x)$ ist die Lösung der Gleichung ...)
- eine Funktionsgleichung, z.B. $f(x) = 2x^2$.

Im folgenden wollen wir einige Möglichkeiten vorstellen, Funktionen zu klassifizieren. Auch wenn einige der eingeführten Begriffe selten explizit in der Physik verwendet werden, so sind sie doch von fundamentaler Bedeutung für ein tieferes Verständnis von Funktionen. Implizit haben sie auch einen praktischen Nutzen, z.B. wenn es um die Beantwortung der Frage geht, um man eine Funktion umkehren kann.
Sei daher im folgenden $f : A \to B$ eine beliebige Funktion.

I.2.1 Injektivität, Surjektivität, Bijektivität

Die Funktion f ist **injektiv**, wenn

$$f(x_1) \neq f(x_2) \quad \text{für alle } x_1, x_2 \in A \text{ mit } x_1 \neq x_2. \tag{I.2.1}$$

Die Injektivität lässt sich an Hand des Graphen der Funktion überprüfen. Bei einer injektiven Funktion schneiden beliebige Parallelen zur x-Achse den Graphen höchstens in einem Punkt.

Abbildung I.2.1: Links: Beispiel für eine injektive Funktion Rechts: Beispiel für eine Funktion, die nicht injektiv ist. Es gibt ein Element aus der Wertemenge B, das als Funktionswert mehrerer Elemente aus A auftritt.

Abbildung I.2.2: Links: Beispiel für eine surjektive Funktion Rechts: Beispiel für eine Funktion, die nicht surjektiv ist. Es gibt ein Element aus der Wertemenge B, das nicht als Funktionswert auftritt.

Die Funktion $f(x) = x^2$ ist nicht injektiv, da z.B. $f(1) = 1 = f(-1)$. Dagegen ist die Funktion $f(x) = x^3$ injektiv, wie man sich z.B. am Graphen schnell klarmacht.
Ein weiteres Beispiel ist in Abb. I.2.1 dargestellt.
Die Funktion f ist **surjektiv**, wenn die **Bildmenge** $f(A) := \{f(x)/x \in A\}$ mit der Zielmenge übereinstimmt:

$$f(A) = D\,. \tag{I.2.2}$$

Man sagt auch: "Die Funktion schöpft die Zielmenge aus".
Die Funktion $f\,:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ ist nicht surjektiv, da z.B. der Wert -1 niemals angenommen wird. Dagegen ist die Funktion $f\,:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ mit $f(x) = x^2$ mit eingeschränktem Zielbereich $\mathbb{R}_0^+$ surjektiv denn jeder Wert $a \in \mathbb{R}_0^+$ wird als Funktionswert angenommen[1]. Ein weiteres Beispiel ist in Abb. I.2.2 dargestellt.
Eine Funktion, die injektiv und surjektiv ist, bezeichnet man als **bijektiv** oder auch **eineindeutige Abbildung**. Dies wird wichtig, wenn man die Umkehrfunktion bilden möchte.

Da $f\,:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$ injektiv und surjektiv ist, ist die Funktion auch bijektiv. Abb. I.2.3 zeigt ein weiteres Beispiel für eine bijektive Funktion.

I.2.2 Monotonie

Die Funktion f heißt **monoton wachsend**, wenn für alle $x_1, x_2 \in A$ gilt

$$\boxed{x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2)} \tag{I.2.3}$$

[1]Denn es gilt natürlich $f(\sqrt{a}) = a$.

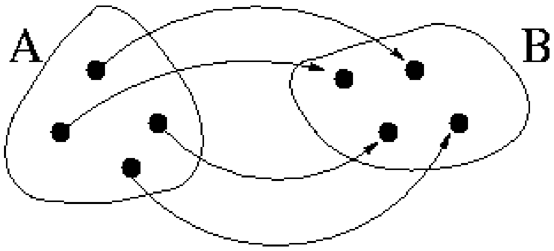

Abbildung I.2.3: Beispiel für eine bijektive Funktion. Jedes Element aus B tritt genau einmal als Funktionswert auf.

und **monoton fallend**, wenn für alle $x_1, x_2 \in A$

$$\boxed{x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2)\,.} \tag{I.2.4}$$

Gilt sogar die strenge Ungleichheit, so heißt die Funktion **streng monoton wachsend** (bzw. **streng monoton fallend**):

$$\boxed{x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)\,.} \tag{I.2.5}$$

bzw.

$$\boxed{x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)\,.} \tag{I.2.6}$$

Wie wir in den Übungen sehen werden, kann man aus der *strengen* Monotonie auf die Injektivität einer Funktion schliessen: Ist f streng monoton (wachsend oder fallend), so ist f auch injektiv.

I.2.3 Symmetrie (gerade/ungerade Funktionen)

Eine Funktion f heißt **gerade**, falls für alle $x \in A$ gilt:

$$f(-x) = f(x)\,. \tag{I.2.7}$$

Der Graph einer geraden Funktion ist spiegelsymmetrisch zur y-Achse. Ein Beispiel ist die Funktion $f(x) = x^2$.
Die Funktion heißt **ungerade**, falls für alle $x \in A$ gilt:

$$f(-x) = -f(x)\,. \tag{I.2.8}$$

Der Graph einer ungeraden Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Ein Beispiel ist die Funktion $f(x) = x^3$.
Man beachte, dass in der Regel Funktionen weder gerade noch ungerade sind!

I.3 Verkettung von Funktionen, Umkehrfunktion

Ein wichtiges Anwendungsgebiet der gerade eingeführten Begriffe ist die Verkettung von Funktionen und die Bestimmung der Umkehrfunktion.
Es seien $f : A \to B$ und $f : C \to D$ Funktionen. Dann bezeichnet man

$$\boxed{h := f \circ g : \qquad \text{mit} \quad h(x) = (f \circ g)(x) := f(g(x))} \tag{I.3.1}$$

als **Verkettung** oder **Hintereinanderausführung** der Funktion f und g. Sie ist definiert für alle $x \in C$ mit $g(x) \in A$.

Beispiele:

1. Es sei $f(x) = \frac{1}{x}$ und $g(x) = x^2$. Dann ist
$$(f \circ g)(x = 2) = f(g(2)) = f(4) = \frac{1}{4}\,. \tag{I.3.2}$$
Andererseits ist $f \circ g$ nicht definiert für $x = 0$, da $g(0) = 0$ nicht im Definitionsbereich von f liegt.

2. Es sei $f(x) = \sin x$ und $g(x) = x^2$. Dann ist

3. Es sei $f(x) = \frac{1}{x}$ und $g(x) = x^2$. Dann ist
$$(f \circ g)(x) = \sin^2(x)\,. \tag{I.3.3}$$
Andererseits ist
$$(g \circ f)(x) = \sin(x^2)\,. \tag{I.3.4}$$
Diese Beispiel zeigt, dass es im allgemeinen auf die Reihenfolge ankommt, d.h.
$$(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)\,. \tag{I.3.5}$$

Wenn f bijektiv ist, dann existiert die **Umkehrfunktion** (oder auch **inverse Funktion**) $f^{-1} : B \to A$ charakterisiert durch

$$\boxed{f\left(f^{-1}(y)\right) = y \qquad \text{und} \qquad f^{-1}\left(f(x)\right) = x \qquad \text{für alle } x \in A, y \in B. \qquad \text{(I.3.6)}}$$

Hierbei darf man die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ nicht mit dem Kehrwert $(f(x))^{-1} = 1/f(x)$ verwechseln! In Bücher etc. wird hier die Notation oft nicht ganz sauber verwendet. Man muß dann dem Zusammenhang entnehmen, was gemeint ist! Manchmal schreibt man daher manchmal auch $\overset{-1}{f}$ für die Umkehrfunktion.
Graphisch kann man die Umkehrfunktion leicht bestimmen. Aus der Definition folgt, dass gegenüber der Funktion f die Rollen von x und y vertauscht sind. Graphisch bedeutet dies, das man den Graphen von f^{-1} durch Spiegelung des Graphen von f an der Winkelhalbierenden $y = x$ erhält.

Beispiele:

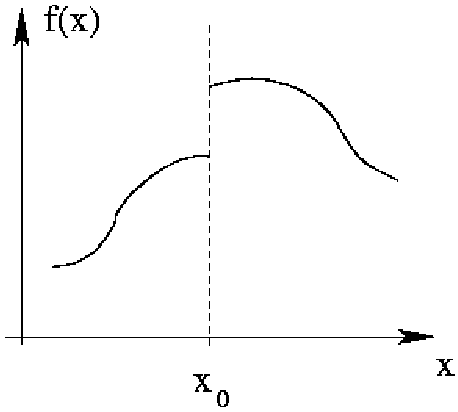

Abbildung I.4.1: Die dargestellte Funktion ist unstetig bei x_0, da sie dort einen Sprung macht.

1. Die Umkehrfunktion von $(x) = -kx$ erhält man, indem man $y = -kx$ nach x auflöst. Somit ist
$$f^{-1}(y) = -\frac{1}{k}y\,. \tag{I.3.7}$$

2. Die Umkehrfunktion von $f(x) = x^2$ existiert nur auf $[0, \infty[$ oder $]-\infty, 0]$, da f nur dort bijektiv ist. Daher ist die Umkehrfunktion auf $[0, \infty[$ durch
$$f^{-1}(y) = \sqrt{y} \tag{I.3.8}$$
und auf $]-\infty, 0]$ durch
$$f^{-1}(y) = -\sqrt{y} \tag{I.3.9}$$
gegeben.

I.4 Stetigkeit

Definition I.4.1 (Stetigkeit)**.**
Eine stetige Funktion hat einen Kurvenverlauf ohne Sprung[2]. Der Graph der Funktion kann dann ohne abzusetzen gezeichnet werden (siehe Abb. I.4.1).

Stellen, an denen eine Funktion ein "außergewöhnliches" Verhalten zeigt, bezeichnet man auch als **Singularitäten**.
Zwei wichtige Typen von singulärem Verhalten sind:

1. Unbestimmtheit: Hiermit meint man einen speziellen Fall von Nichtstetigkeit, den wir am Einfachsten anhand einer oft gebrauchten Funktion illustrieren, der sog. **Heaviside'schen**

[2]Wir verzichten hier auf eine streng mathematische Definition zu Gunsten der intuitiven Vorstellung.

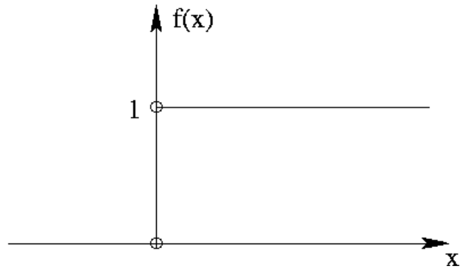

Abbildung I.4.2: Der Graph der Heaviside'schen Sprungfunktion.

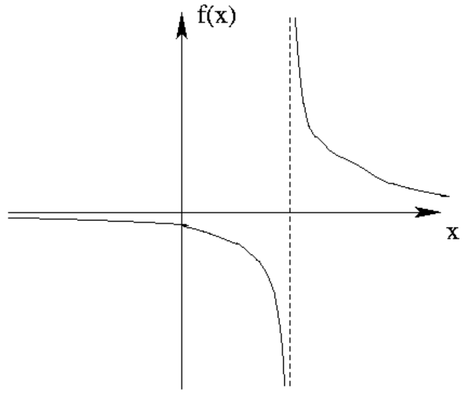

Abbildung I.4.3: Funktion mit einer Singularität im engeren Sinne.

Sprungfunktion

$$\Theta(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}. \tag{I.4.1}$$

Man sagt: "Θ ist singulär bei $x = 0$". $\Theta(0)$ wird i.a. per Konvention festgelegt. Auf welchen Wert hängt meist von der Anwendung ab. Die gebräuchlichsten Konventionen sind $\Theta(0) = 1$, $\Theta(0) = 0$ und $\Theta(0) = 1/2$.
Der Graph der Sprungfunktion ist in Abb. I.4.2 dargestellt.

2. Unendlichkeit (Divergenz): Der zweite wichtige Typ von Singularitäten sind Stellen, an denen die Funktionen keinen endlichen Wert annehmen, d.h. divergieren. Dies sind Singularitäten im engeren Sinne.
   Ein Beispiel ist in Abb. I.4.3 dargestellt, nämlich die Funktion $f(x) = \frac{1}{x-1}$. Sie ist offensichtlich für $x = 1$ nicht definiert, da dort der Nenner eine Nullstelle hat. Man sagt auch, dass f bei $x = 1$ *singulär* ist bzw. genauer, dass f dort einen **Pol** (bzw. eine **Polstelle**) hat.

In der Physik spielen Singularitäten eine wichtige Rolle, z.B. in der Theorie der Phasenübergänge. Diese lassen sich an Hand ihres Verhaltens in der Nähe von Singularitäten charakterisieren!

Bemerkung: Er gibt auch Singularitäten, die sich "beheben" lassen. Ein Beispiel ist die Funktion

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-3x+2} = \frac{1}{x-1}. \tag{I.4.2}$$

Formal hat der Nenner die Nullstellen $x = 1$ und $x = 2$, d.h. dort sollten Singularitäten vorliegen. Da die Nullstelle $x = 2$ von der entsprechenden Nullstelle des Zählers kompensiert wird, merkt man aber von ihr nichts. Die Funktion kann an der Stelle $x = 2$ stetig ergänzt werden durch die Festlegung $f(2) = 1$. Formal entspricht das dem Kürzen des Linearfaktors $x-2$. Man bezeichnet diese Singularität daher als **hebbare Singularität**.

Kapitel II

Elementare Funktionen

Im folgenden wollen wir die wichtigsten Funktionenklassen, die in der Physik immer wieder vorkommen, vorstellen und ihre wesentlichen Eigenschaften aufzählen. Später und in den Übungen werden wir noch weitere wichtige Funktionen kennenlernen.

II.1 Potenzen und Polynome

Die Potenzfunktion ist definiert durch

$$f(x) = x^a. \tag{II.1.1}$$

x bezeichnet man als **Basis** und a als **Exponenten**.
Für Exponenten $a = n \in \mathbb{N}$ sind die Potenzfunktionen mit geradem Exponenten n gerade Funktionen, während sie für ungerade n ungerade Funktionen sind (siehe Abb. II.1.1).
Folgende Rechenregeln gelten für die Potenzfunktion (mit $x \in \mathbb{R}_0^+$ und $a, b \in \mathbb{R}$):

$$\boxed{x^a x^b = x^{a+b}, \qquad (x^a)^b = x^{ab}, \qquad x^{-a} = \frac{1}{x^a}.}$$

Außerdem gilt $x^0 = 1$, wobei aber 0^0 nicht definiert ist!

Als **Polynom n-ter Ordnung** bezeichnet man Summen der Form

$$f_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \tag{II.1.2}$$

mit der natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ und $a_j \in \mathbb{R}$.

Eine **rationale Funktion** ist Quotient zweier Polynome f_m und g_n:

$$h(x) = \frac{f_m(x)}{g_n(x)}. \tag{II.1.3}$$

In den Übungen werden wir die sog. Partialbruchzerlegung diskutieren, mit der sich rationale Funktionen in eine Standardform bringen lassen.

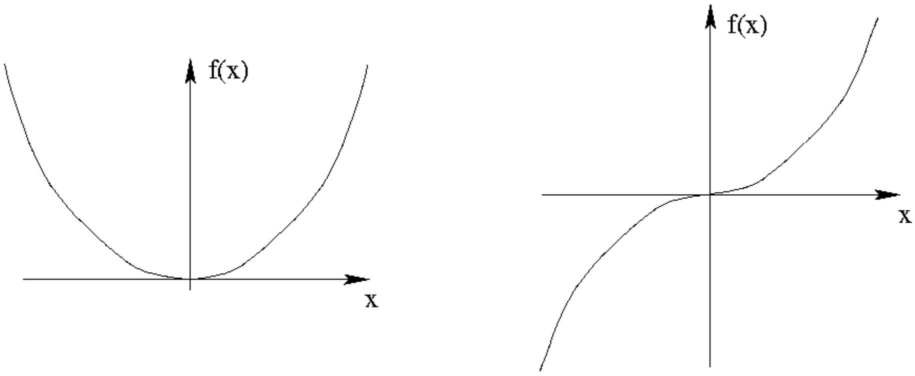

Abbildung II.1.1: Graph der Potenzfunktion $f(x) = x^n$ für gerades n (links) und ungerades n (rechts).

II.2 Exponentialfunktion

Bei der Potenzfunktion ist die Basis variabel und der Exponent fest. Bei den Exponentialfunktionen ist es genau anders herum:

$$f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \qquad \text{mit} \qquad f_a(x) = a^x. \tag{II.2.1}$$

Spezielle Exponentialfunktionen sind

$$f_2(x) = 2^x, \qquad f_{10}(x) = 10^x, \qquad f_e(x) = e^x = \exp(x), \tag{II.2.2}$$

wobei e die sogenannte **Eulersche Zahl** ist: $e = 2.71828\ldots$.
Man bezeichnet die Exponentialfunktion zur Basis e auch als *die* Exponentialfunktion oder als **natürliche Exponentialfunktion**.

Die Exponentialfunktionen sind streng monoton wachsend und stetig. Für $a > 1$ wachsen sie für große x sehr schnell an und fallen für große negative x sehr schnell ab (Abb. II.2.1).
Spezielle Funktionswerte sind

$$f_a(0) = 1, \qquad f_a(1) = a, \qquad f_a(-1) = \frac{1}{a}. \tag{II.2.3}$$

Für die Exponentialfunktionen gelten folgende Rechenregeln:

$$\boxed{a^x b^x = (ab)^x, \qquad a^x a^y = a^{x+y}.}$$

Sie sind also durch folgende Funktionalgleichung charakterisiert:

$$\boxed{f_a(x) f_a(y) = f_a(x+y).}$$

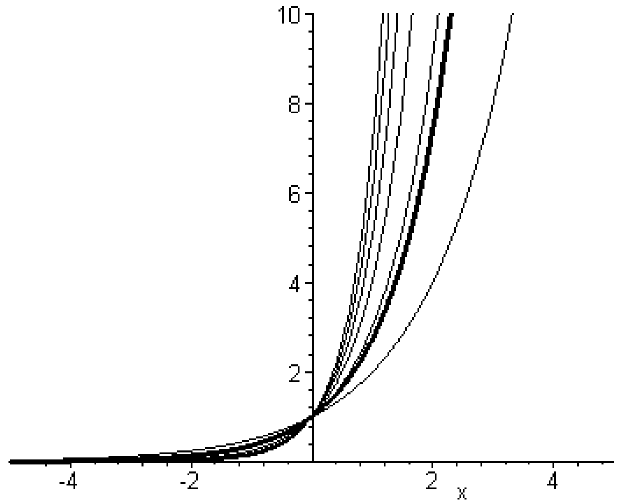

Abbildung II.2.1: Graph der Exponentialfunktion f_a für verschiedene Basen $a = 2, 3, \cdots, 7$. Die natürliche Exponentialfunktion ($a = e$) entspricht dem fett gezeichneten Graphen.

Die Exponentialfunktion ist eine der wichtigsten Funktionen im Rahmen der Naturwissenschaften. Sie beschreibt z.B. viele Wachstumsprozesse (Zellteilung, Kernspaltung) und Zerfallsprozesse (Radioaktivität).

Wir haben schon erwähnt, dass die Exponentialfunktionen sehr schnell anwachsen. Etwas präziser: Sie wachsen stärker an als jede Potenz, was sich mathematisch folgendermaßen ausdrücken lässt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{f_a(x)} = 0 \qquad (a > 1, n \geq 0) \tag{II.2.4}$$

Entsprechend fallen die Funktionen für $x \to -\infty$ sehr schnell ab, was man sich mit $a^{-x} = 1/a^x$ leicht klar macht. Mit dieser Beziehung kann man sich auch überlegen, was im Fall $0 < a < 1$ passiert!

II.3 Logarithmus

Der Logarithmus ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion.

Definition II.3.1 (Umkehrfunktion)**.**
Ist $f : X \to Y$ eine bijektive Abbildung, so existiert die **Umkehrfunktion** (oder auch **inverse Funktion**) $f^{-1} : Y \to X$ charakterisiert durch

$$\boxed{f\left(f^{-1}(y)\right) = y \qquad \text{und} \qquad f^{-1}\left(f(x)\right) = x \qquad \text{für alle } x \in X, y \in Y.}$$

Hierbei darf man die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ nicht mit dem Kehrwert $(f(x))^{-1} = 1/f(x)$ verwechseln! In Bücher etc. wird hier die Notation oft nicht ganz sauber verwendet. Man muß dann

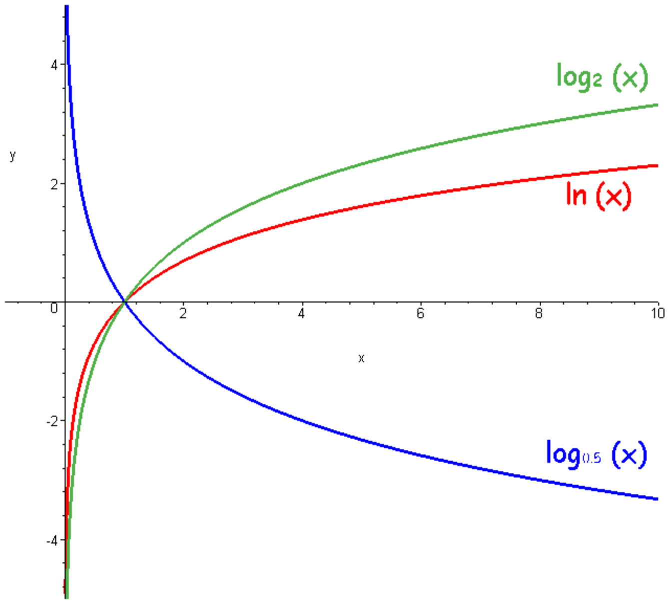

Abbildung II.3.1: Graph der Logarithmusfunktion $\log_a$ für verschiedene Basen $a = 2$, $a = e$ und $a = 1/2$.

dem Zusammenhang entnehmen, was gemeint ist! Manchmal schreibt man daher auch $\overset{-1}{f}$ für die Umkehrfunktion.

Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $f_a(x) = a^x$ (mit $a > 0$) bezeichnet auch man als **Logarithmus (zur Basis** a**)** $\log_a y : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$.
Die Logarithmusfunktion ist streng monoton wachsend und stetig. Ihren Graphen erhält man, wie allgemein für Umkehrfunktionen, durch Spiegelung des Graphen von f_a an der Diagonalen $y = x$ (siehe Abb. II.3.1). Es gilt

$$\boxed{x = \log_a(a^x), \qquad y = a^{\log_a y}.}$$

Für die Fälle $a = 10$ und $a = e$ haben sich spezielle Bezeichnungen eingebürgert:

$$\ln x := \log_e x, \qquad \log x := \log_{10} x. \tag{II.3.1}$$

Bem.: Wir hatten im vorigen Abschnitt gesehen, dass die Exponentialfunktion für große x schneller als jede Potenz anwächst. Als Konsequenz daraus, wächst der Logarithmus langsamer als jede Potenz, d.h.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log_a x}{x^\gamma} = 0 \qquad \text{für } \gamma > 0. \tag{II.3.2}$$

Auch die Rechenregeln ergeben sich direkt aus den entsprechenden Regeln für die Exponentialfunktion. Wir stellen sie hier kurz zusammen:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \log_a(AB) &=& \log_a A + \log_a B \\ \log_a(A^r) &=& r\log_a A \\ \log_a\left(\frac{1}{A}\right) &=& -\log_a A \end{array}}$$

mit $A, B > 0$ und $r \in \mathbb{R}$.
Mit Hilfe des Logarithmus können wir nun Exponentialfunktionen mit unterschiedlichen Basen ineinander umrechnen. Insbesondere gilt:

$$\boxed{a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \ln a}.}$$

Dies zeigt, dass es tatsächlich genügt, die natürliche Exponentialfunktion[1] $\exp(x) = e^x$ zu kennen. In den Übungen werden wir sehen, dass eine analoge Aussage auch für den natürlichen Logarithmus $\ln x$ gilt!

II.4 Trigonometrische Funktionen

Zur Definition der trigonometrischen Funktionen betrachten wir einen beliebigen Punkt auf dem Einheitskreis. Diese lassen sich vollständig durch Angabe des Winkels ϕ charakterisieren.

Winkel werden in der Physik in der Regel im Bogenmaß (Radiant) gemessen. Die Umrechnung in Grad geschieht folgendermassen:

$$\text{Winkel in Grad} = \frac{360°}{2\pi} \cdot \text{Winkel in Radiant}.$$

Daher entspricht der Winkel π dem Winkel $\frac{360°}{2\pi} \cdot \pi = 180°$.

Die Koordinaten eines Punktes auf dem Einheitskreis sind durch $x = \cos\phi$ und $y = \sin\phi$ gegeben. Dies entspricht der klassischen geometrischen Definition der Winkelfunktionen

$$\cos\phi = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}, \qquad \sin\phi = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}}$$

da die Länge der Hypothenuse hier gleich 1 ist.
Wenn wir nun den Winkel ϕ variieren, ändern sich auch $\cos\phi$ und $\sin\phi$. Wir können daher Sinus und Cosinus als Funktionen von ϕ auffassen.
Bevor wir die trigonometrischen Funktionen im Detail diskutieren, noch eine Definition:

Definition II.4.1 (periodische Funktionen)**.**
Eine Funktion f heißt **periodisch mit Periode** T, wenn für alle x gilt:

$$f(x+T) = f(x).$$

[1]Oder jede beliebige andere Exponentialfunktion!

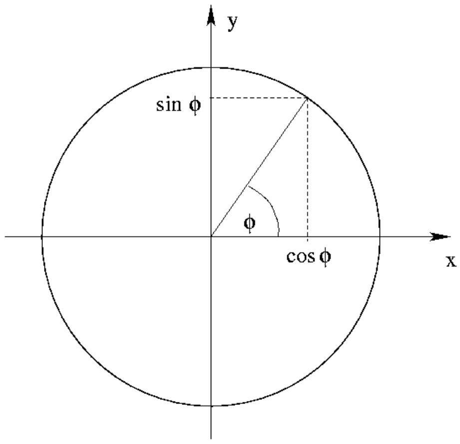

Abbildung II.4.1: Definition von Sinus und Cosinus am Einheitskreis.

Man beachte, dass die Periode $T > 0$ nicht eindeutig ist, da mit T immer auch $2T$, $3T$ etc. Perioden sind. Die kleinste Wert von $T > 0$, der obige Identität erfüllt, heißt *kleinste Periode* oder einfach nur *die Periode* von $f(t)$.

Abb. II.4.2 zeigt den Graphen von $\cos\phi$. Der Cosinus ist als Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Aus der geometrischen Interpretation ist klar, dass die Funktionswerte im Intervall $[-1,1]$ liegen müssen. Sie zeigt außerdem, dass der Cosinus eine gerade Funktion ist, die zudem 2π-periodisch ist. Zusammengefasst gilt also:

$$\begin{aligned}
\cos &: \mathbb{R} \to [-1,1] \\
\cos\phi &= \cos(-\phi) \\
\cos\phi &= \cos(\phi + 2\pi) \\
\text{Nullstellen :} &\quad (2n+1)\,\frac{\pi}{2} \qquad (n \in \mathbb{Z})
\end{aligned}$$

Analoge Überlegungen können für den Sinus angestellt werden. Sein Graph ist in Abb. II.4.2 gezeigt. Allerdings ist der Sinus eine ungerade Funktion. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\sin &: \mathbb{R} \to [-1,1] \\
\sin\phi &= -\sin(-\phi) \\
\sin\phi &= \sin(\phi + 2\pi) \\
\text{Nullstellen :} &\quad n\pi \qquad (n \in \mathbb{Z})
\end{aligned}$$

Zwischen der Sinus- und Cosinusfunktion bestehen verschiedene wichtige Zusammenhänge:

$$\boxed{\begin{aligned}
1 &= \sin^2\phi + \cos^2\phi, \\
\cos\phi &= \sin\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right), \\
\sin\phi &= \cos\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}}$$

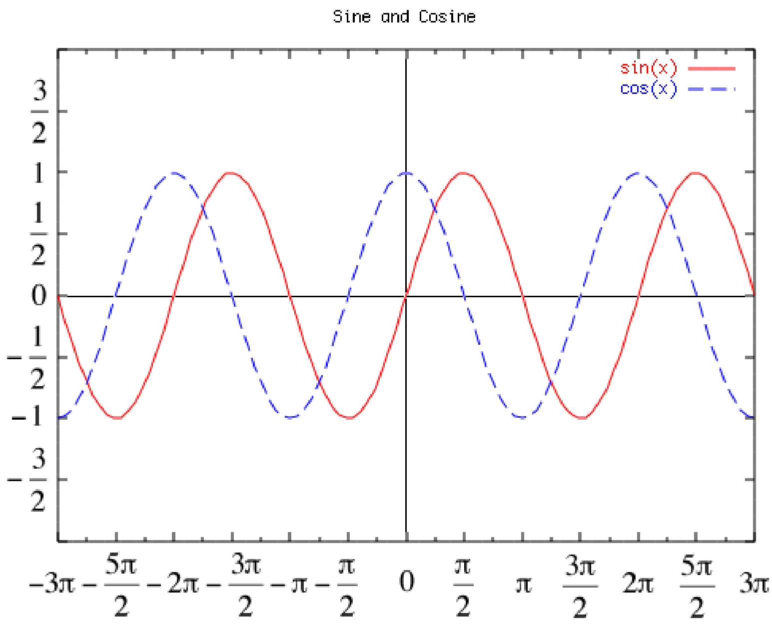

Abbildung II.4.2: Graph der Cosinus- und Sinusfunktion.

Die erste Beziehung folgt sofort aus dem Satz von Pythagoras und der Definition am Einheitskreis. Die anderen beiden Identitäten besagen, dass Sinus und Cosinus um $\frac{\pi}{2}$ gegeneinander verschoben sind (siehe Abb. II.4.2).

Aus Sinus und Cosinus lassen sich weitere trigonometrische Funktionen definieren, die in Anwendungen häufig auftreten. Zunächst ist dies der **Tangens**

$$\tan\phi := \frac{\sin\phi}{\cos\phi}$$

mit

$$\begin{aligned} \tan &: \mathbb{R}\setminus\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\middle|n\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{R} \\ \tan\phi &= -\tan(-\phi) \\ \tan\phi &= \tan(\phi+\pi) \\ \text{Nullstellen}: & \quad n\pi \qquad (n\in\mathbb{Z}) \\ \text{Pole}: & \quad (2n+1)\frac{\pi}{2} \qquad (n\in\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Im Gegensatz zu Sinus und Cosinus ist der Tangens also π-periodisch. Seine Nullstellen stimmen mit denen des Sinus überein. Außerdem hat er Polstellen an den Nullstellen des Cosinus (siehe Abb. II.4.3). Im Gegensatz zur Sinus- und Cosinusfunktion ist der Tangens nicht beschränkt, sein Wertebereich sind die gesamten reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

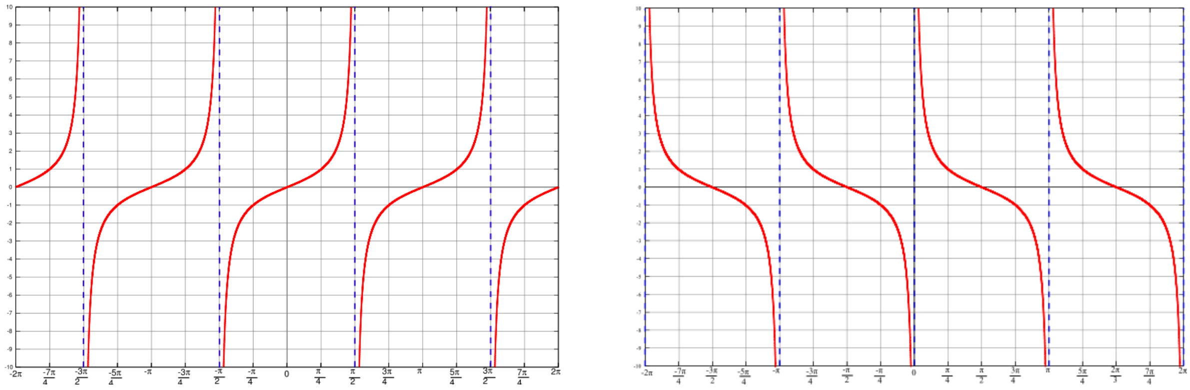

Abbildung II.4.3: Graph der Tangens- (links) und Cotangensfunktion (rechts).

Der **Cotangens** ist der Kehrwert des Tangens:

$$\cot\phi := \frac{1}{\tan\phi} = \frac{\cos\phi}{\sin\phi}$$

und hat die folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
\cot &: \quad \mathbb{R}\setminus\{n\pi \big| n\in\mathbb{Z}\} \to \mathbb{R} \\
\cot\phi &= -\cot(-\phi) \\
\cot\phi &= \cot(\phi+\pi) \\
\text{Nullstellen}: &\quad (2n+1)\frac{\pi}{2} \qquad (n\in\mathbb{Z}) \\
\text{Pole}: &\quad n\pi \qquad (n\in\mathbb{Z})
\end{aligned}$$

Der Cotangens ist auch π-periodisch. Er hat Pole an den Nullstellen des Sinus und seine Nullstellen stimmen mit denen des Cosinus überein. Wie der Tangens ist auch der Cotangens nicht beschränkt, sein Wertebereich sind die gesamten reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

Neben den trigonometrischen Funktionen sollte man auch deren Umkehrfunktionen gut kennen. Da die trigonometrischen Funktionen alle periodisch sind, muß man ihren Definitionsbereich einschränken, so dass sie bijektiv werden und man eine Umkehrfunktion überhaupt definieren

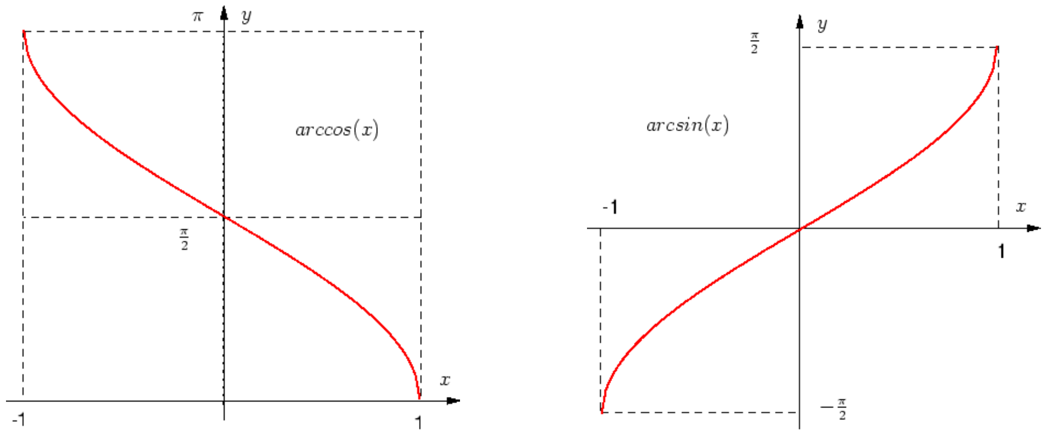

Abbildung II.4.4: Graph der Umkehrfunktionen $\arccos$ (links) und $\arcsin$ (rechts) der Sinus- und Cosinusfunktion.

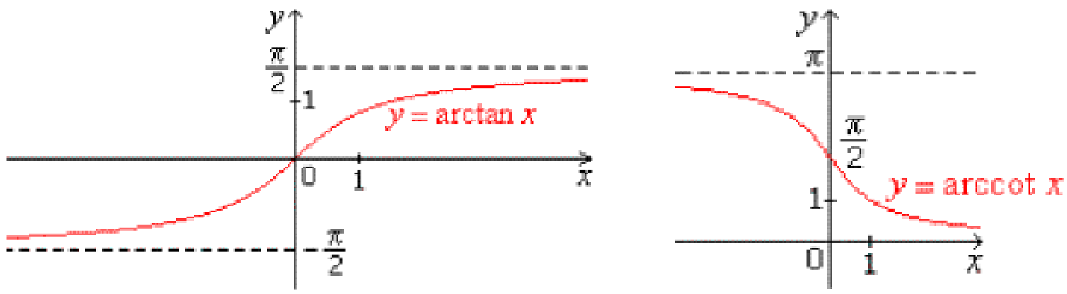

Abbildung II.4.5: Graph der Umkehrfunktionen $\arctan$ (links) und arccot (rechts) der Tangens- und Cosinusfunktion.

kann. Dies führt auf die Hauptwerte der Funktionen. Im folgenden sind diese zusammengestellt:

$$
\begin{array}{rccclll}
\cos: & [0,\pi] & \longrightarrow & [-1,1] & & & \\
 & & \longleftarrow & & : & \arccos & (\text{Arcuscosinus}) \\
\sin: & [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & [-1,1] & & & \\
 & & \longleftarrow & & : & \arcsin & (\text{Arcussinus}) \\
\tan: &]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[& \longrightarrow &]-\infty,\infty & & & \\
 & & \longleftarrow & & : & \arctan & (\text{Arcustangens}) \\
\cot: &]0,\pi[& \longrightarrow &]-\infty,\infty[& & & \\
 & & \longleftarrow & & : & \operatorname{arccot} & (\text{Arcuscotangens})
\end{array}
$$

Abb. II.4.4 und II.4.5 zeigen die Graphen der inversen trigonometrischen Funktionen.

Kapitel III

Differentialrechnung

III.1 Ableitung

Ein typisches physikalisches Problem ist die Bestimmung der Geschwindigkeit, wenn die zurückgelegte Entfernung als Funktion der Zeit bekannt ist. Dies gilt insbesondere, wenn die Geschwindigkeit nicht konstant ist. Man kann nach der momentanen Geschwindigkeit zu einem gegebenen Zeitpunkt fragen. Anschaulich entspricht dies der Bestimmung der Steigung des Graphen einer vorgegebenen Funktion in einem beliebigen Punkt.

Definition III.1.1 (Ableitung, Differentiation)**.**
Der Zuwachs[1] $y \to y + \Delta y$ einer Funktion $y(x)$ bei Veränderung des Arguments $x \to x + \Delta x$ ist ein Maß für die Veränderung einer Funktion (siehe Abb. III.1.1):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

Dieser **Differenzenquotient** ist also die Steigung der Geraden durch die Punkte $(x, y(x))$ und $(x + \Delta x, y(x + \Delta x))$ (siehe Abb. III.1.1), der sog. **Sekante**. Im oben angegebenen Beispiel entspricht dies der Durchschnittsgeschwindigkeit im 'Zeitintervall' $[x, x + \Delta x]$.

Die **Ableitung** $y'(x)$ einer Funktion $y(x)$ ist dann die *momentane* Veränderung der Funktion, die durch den Grenzwert

$$y'(x) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

gegeben ist. Man schreibt für diesen **Differentialquotienten** auch symbolisch

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

mit den **Differentialen** dx, dy.

Höhere Ableitungen sind rekursiv definiert: $y'' = (y')'$, $y^{(n+1)} = (y^{(n)})'$, etc. Man schreibt auch $y^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$.

[1] Dieser 'Zuwachs' kann auch negativ sein!

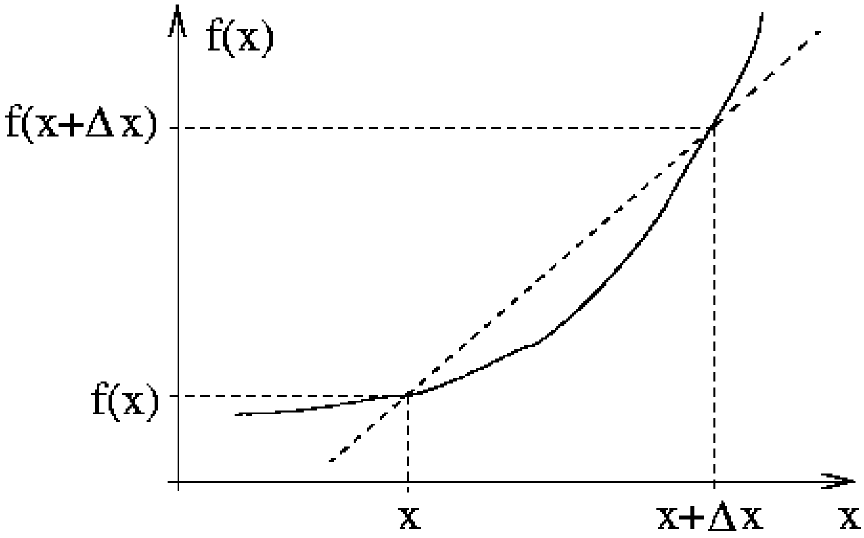

Abbildung III.1.1: Zur Definition der Ableitung

Bemerkung: Streng genommen ist $\frac{dy}{dx}$ kein Quotient zweier Größen dy und dx und kann nicht auseinandergerissen werden. Trotzdem macht man dies in der Physik häufig! Dahinter steckt die Vorstellung, daß man mit den Veränderungen Δy, Δx rechnet und am Ende erst den Grenzübergang $\Delta x \to 0$ vollzieht.

Beispiel III.1.1.

$$y(x) = x^n \qquad \curvearrowright \qquad y'(x) = nx^{n-1}$$

Dies kann man mit Hilfe der binomischen Entwicklung einsehen, denn es gilt $(x + \Delta x)^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + O((\Delta x)^2)$. Setzt man dies in den Differenzenquotienten ein, so erhält man $\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x} = nx^{n-1} + O(\Delta x)$, woraus im Limes $\Delta x \to 0$ das Ergebnis folgt.

III.2 Rechenregeln

Im folgenden stellen wir die wichtigsten Rechenregeln zusammen, mit denen sich aus bekannten Ableitungen weitere Ableitungen bestimmen lassen:

1. $y(x) = u(x)v(x) \quad \Rightarrow \quad \boxed{y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)}$ (Produktregel)

2. $y(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}}$ (Quotientenregel)

3. $y = f(u), u = u(x) \quad \Rightarrow \quad y(x) = f\left(u\left(x\right)\right)$
   $\Rightarrow \; y' = \frac{dy}{dx} \underset{\text{“}erweitern\text{''}}{=} \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = f'\left(u\left(x\right)\right)u'(x)$ d.h. $\boxed{y' = f'\left(u\left(x\right)\right)u'(x)}$ (Kettenregel)

4. *Ableitung der Umkehrfunktion $x = f^{-1}(y)$ von $y = f(x)$:*

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)'(x) = \tfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}}, \qquad \text{bzw. in Kurzform} \qquad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

Dies beweist man z. B. über die Kettenregel, da $f(f^{-1}(x)) = x$. Man beachte, dass man die Ableitung von f' an der Stelle $f^{-1}(x)$ zu nehmen hat (siehe folgendes Beispiel).

Beispiel III.2.1.
Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ ist bekanntlich der (natürliche) Logarithmus $f^{-1}(x) = \ln x$. Da $f'(x) = e^x$ erhält man als Ableitung des Logarithmus

$$\frac{d\ln x}{dx} = \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

III.3 Ableitungen elementarer Funktionen

Im Prinzip genügen die oben angegebenen Rechenregeln zusammen mit der Kenntnis einige weniger Ableitung, um fast alle wichtigen Funktionen differenzieren zu können. Die wichtigsten Funktionen, deren Ableitung man auswendig kennen sollte, sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

$f(x)$	$f'(x)$
a	0
x^a	ax^{a-1}
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

Dabei ist $a \in \mathbb{R}$ eine Konstante.
Im Prinzip könnte man diese Liste noch verkürzen, da man z.B. die Ableitung des Logarithmus wie im obigen Beispiel aus der der Exponentialfunktion bestimmen könnte. Auch die Ableitung des Sinus könnte aus der des Kosinus hergeleitet werden:

$$\frac{d\sin x}{dx} = \frac{d}{dx}\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos x.$$

Dabei haben wir neben den bekannten Identitäten für trigonometrische Funktionen nur die Kettenregel benutzt.

III.4 Höhere Ableitungen

$f'' :=$ zweite Ableitung von $f :=$ Ableitung von f'

Man schreibt auch:

$$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}$$

Allgemein definiert man die n-te Ableitung $f^{(n)}$ von f rekursiv durch:

$$f^{(n)} := \left(f^{(n-1)}\right)' =: \frac{d^n f}{dx^n}$$

III.5 Kurvendiskussion

Funktionen $f : D \to Z$ lassen sich auf verschiedene Arten und Weisen charakterisieren. In einer Kurvendiskussion kann man folgende Eigenschaften untersuchen.

1. **Symmetrie**: Ist f eine gerade ($f(-x) = f(x)$) oder ungerade ($f(-x) = -f(x)$) Funktion? Man beachte, dass in der Regel Funktionen weder gerade noch ungerade sind!

2. **Stetigkeit**: Ist die Funktion stetig, wo hat sie Singularitäten und von welchem Typ sind diese?

3. **Monotonie**: Ist die Funktion (streng) monoton wachsend (bzw. fallend)? In der Regel ist diese Frage abschnittsweise zu beantworten.

4. **Nullstellen**: Wo liegen die Nullstellen der Funktion?

5. **Asymptotik:** Wie ist das Verhalten er Funktion am Rand, insbesondere bei unbeschränkten Definitionsbereichen A (d.h. für $x \to \pm\infty$)?

6. **Differenzierbarkeit**: Ist die Funktion differenzierbar und wie lautet die Ableitung?

7. **Extrema**: Bestimmung[2] der lokalen und globalen Extremwerte, sowie von Wendepunkten.

Dabei gelten folgende Definitionen: f nimmt im Punkt x_0 ein **(lokales) Maximum (bzw. Minimum)** an, falls es ein Intervall $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ um x_0 gibt ($\delta > 0$), in dem $f(x) \leq f(x_0)$ (bzw. $f(x) \geq f(x_0)$) ist. Das größte lokale Maximum (bzw. kleinste lokale Minimum) heißt **absolutes Maximum** (bzw. **absolutes Minimum**). Hier müssen evtl. Funktionswerte an den Rändern des Definitionsbereichs separat betrachtet werden!

Mit Hilfe der Ableitung kann man einfache Kriterien für das Vorliegen von Extrema angegeben:

> $f(x)$ hat bei x_0 ein lokales Extremum, falls
>
> $$f'(x_0) = 0 \qquad \text{und} \qquad f''(x_0) \neq 0 \tag{III.5.1}$$
>
> (falls x_0 im Inneren des Definitionsbereiches liegt). Ist $f''(x_0) < 0$, so handelt es sich um ein lokales Maximum, für $f''(x_0) > 0$ um ein lokales Minimum.

[2] Hier müssen evtl. Funktionswerte an den Rändern des Definitionsbereichs separat betrachtet werden!

Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$ aber $f'''(x_0) \neq 0$, so ist x_0 ein **Sattelpunkt**. Allgemein heißen die Extrema von f', d.h. Punkte mit $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$, **Wendepunkte**. Hier ändert die Krümmung des Graphen ihr Vorzeichen (von rechts- nach links-gekrümmt, oder umgekehrt).

Kapitel IV

Integralrechnung

Eine häufig auftauchende Frage lautet: Wie bestimmt man $x(t)$ wenn $v(t) = \frac{dx}{dt}$ bekannt ist ?
In physikalischen Problemen ist dabei z.B. $v(t)$ der zeitliche Geschwindigkeitsverlauf einer Bewegung und $x(t)$ die bis zur Zeit t zurückgelegte Strecke.
Die zur Beantwortung dieser Frage nötige Umkehrung der Differentiation bezeichnet man als **Integration**.

IV.1 Stammfunktion

Definition IV.1.1 (Stammfunktion)**.**
$F(x)$ heißt **Stammfunktion** der Funktion $f(x)$, wenn $F'(x) = f(x)$. Man schreibt auch

$$\boxed{F(x) = \int f(x)dx}$$

und bezeichnet dies als das **unbestimmte Integral** von f. In der Physik schreibt man auch häufig $\int dx f(x)$, was später bei mehrdimensionalen Integralen eine nützliche Konvention ist.

F ist nicht eindeutig, denn mit $F(x)$ ist auch $F(x) + a$ mit einer beliebigen reellen Konstanten a eine Stammfunktion. Genauer bezeichnet daher $\int f(x)dx$ die Menge aller Stammfunktionen von f. a heißt auch **Integrationskonstante**.

Ähnlich wie die Ableitung können wir uns eine Tabelle mit den wichtigsten Stammfunktionen zusammenstellen:

$f(x)$	$F(x)$
x^r	$\frac{1}{r+1}x^{r+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
e^x	e^x
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$

Dabei ist zu beachten, dass bei jeder Stammfunktion additiv noch Integrationskonstante a auftritt.
Im ersten Beispiel x^r ist $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Ist $r \notin \mathbb{N}$, so muß $x > 0$ sein.

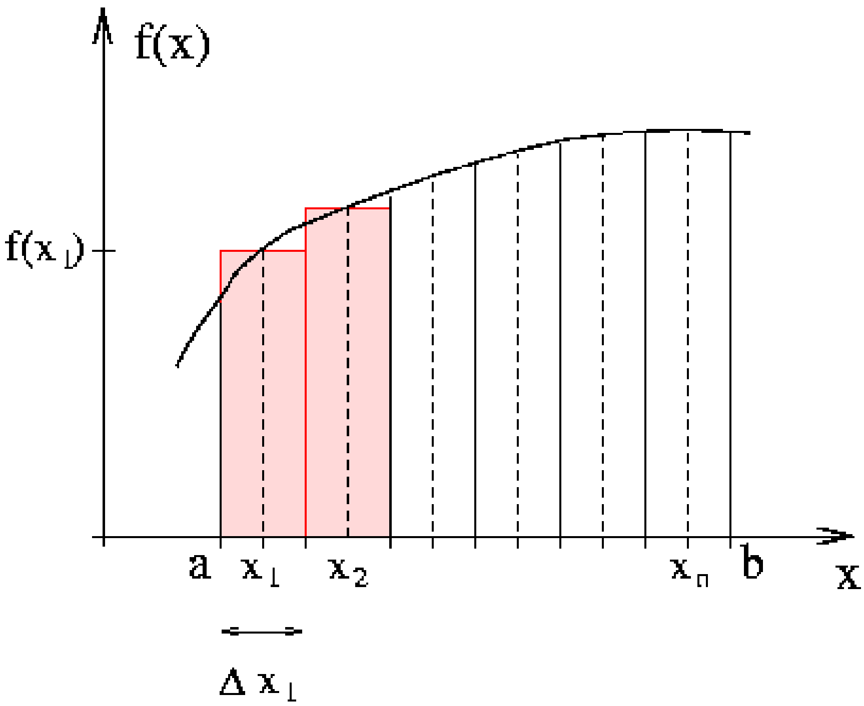

Abbildung IV.2.1: Das Integral

IV.2 Bestimmtes Integral

Eine andere Motivation der Integration ist die Flächenberechnung. Man spricht auch von *bestimmten Integralen*. Für die Fläche die vom Graphen $f(x)$ der Funktion f mit der $x-$Achse zwischen $x = a$ und $x = u$ eingeschlossene Fläche (schraffierter Bereich in Abb. IV.2.1) schreibt man auch:

$$F(u) = \int_a^u f(x)dx.$$

Man fragt sich nun: Wie sieht $F(u)$ aus, wenn $f(x)$ bekannt ist?
Auf den ersten Blick ist natürlich nicht offensichtlich, dass dieses Problem etwas mit dem im vorigen Abschnitt eingeführten Integral zu tun hat. Die Notation deutet aber einen solchen Zusammenhang schon an, den wir uns im folgenden klar machen wollen.
Zu Bestimmung der Funktion $F(u)$ vergrößern wir den Integrationsbereich um ein Stück Δu (siehe Abb. IV.2.2):

$$\begin{aligned} F(u + \Delta u) &= F(u) + f(u)\Delta u + \Delta R, \\ \Delta R &\approx \Delta u \Delta f. \end{aligned}$$

Die Fläche ΔR haben wir nur sehr grob durch $\Delta u \Delta f$ approximiert. I.a. wird hier noch ein Koeffizient α auftreten, d.h. $\Delta R = \alpha \Delta u \Delta f$. In dem Beispiel in Abb. IV.2.1 wäre eine Approximation

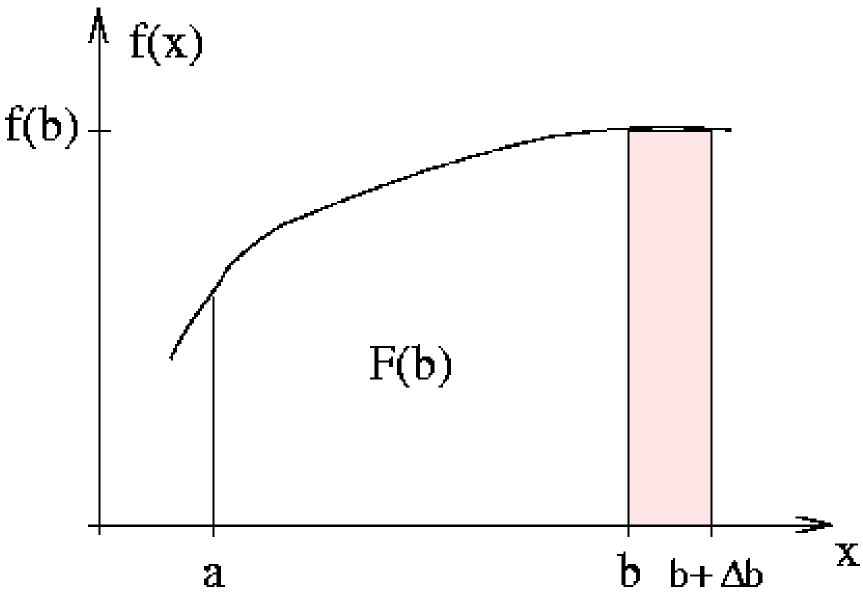

Abbildung IV.2.2: Zum Beweis des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung.

des Bereichs ΔR durch ein Dreieck (d.h. $\alpha = 1/2$) sicher genauer. Wir werden aber gleich sehen, dass es darauf gar nicht ankommt. Wichtig ist nur, dass ΔR gegen Null geht, wenn Δu oder Δf gegen Null gehen.
Nun ergibt sich durch einfache Umformung:

$$\frac{F(u+\Delta u) - F(u)}{\Delta u} = \frac{f(u)\Delta u + \Delta R}{\Delta u} \approx f(u) + \Delta f$$

und somit für $\Delta u \to 0$:

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{F(u+\Delta u) - F(u)}{\Delta u} = f(u)$$

Dabei haben wir ausgenutzt, dass $\lim_{\Delta u \to 0} \Delta f = 0$.

Insgesamt haben wir also:

$$f(u) = \frac{dF(u)}{du} = F'(u),$$

d.h. F ist eine Stammfunktion von f bzw. $F = \int f(x)dx$.

Die Bedingung $F(u = a) = 0$ legt die Integrationskonstante fest. So kommt man zum **bestimmten Integral:**

$$\boxed{\int_a^u f(x)dx = F(u) - F(a) =: F(x)\Big|_a^u}$$

Das bestimmte Integral von f zwischen a und u ist also eine Zahl!

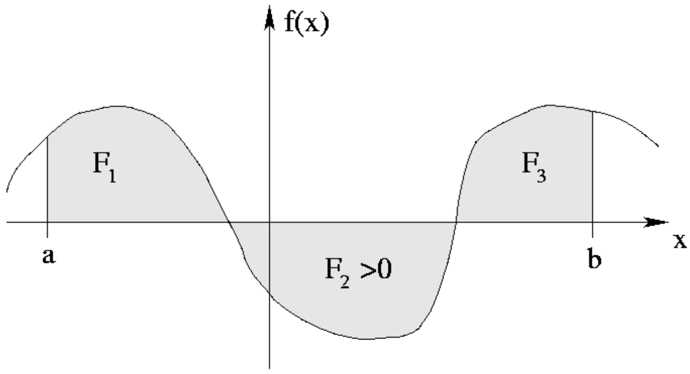

Abbildung IV.2.3: Zur Interpretation des bestimmten Integrals als Fläche.

Den Zusammenhang zwischen bestimmtem Integral und Stammfunktion bezeichnet man auch als den **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**.

Bei der Berechung kann eine *beliebige* Stammfunktion gewählt werden, da die additive Konstante bei der Bildung der Differenz $F(u) - F(a)$ herausfällt.

Beispiel IV.2.1.
Als einfaches Beispiel betrachten wir die Funktion x^n. Das unbestimmte Integral ist gegeben durch

$$F(x) = \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c.$$

Das bestimmte Integral zwischen a und u ist

$$\int_a^u x^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Speziell für $a = 1$ und $u = 2$ ergibt sich

$$\int_1^2 x^n dx = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}.$$

Bei der Interpretation des bestimmten Integrals als eingeschlossene Fläche muss man vorsichtig sein, wenn die Funktion negativ werden kann. In dem Beispiel in Abb. IV.2.3 wäre die eingeschlossene Fläche durch $F_1 + F_2 + F_3$ gegeben, wobei $F_j > 0$. Das Integral liefert aber

$$\int_a^b f(x)dx = F_1 - F_2 + F_3.$$

Im folgenden stellen wir einige einfache Rechenregeln zusammen. Zunächst einmal ist die Integration *linear*, d.h. für beliebige (integrierbare) Funktionen f und g und reelle Zahlen r gilt

$$\int_a^b (f(x) + rg(x))\, dx = \int_a^b f(x)dx + r \int_a^b g(x)dx.$$

Außerdem ist die Integration additiv, d.h.

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \qquad (\text{mit } a < c < b).$$

Außerdem gilt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -\left(F(a) - F(b)\right) = -\int_b^a f(x)dx,$$

wobei F eine Stammfunktion von f ist. Mit der letzten Regel überlegt man sich leicht, was bei der Additivität in dem Fall passiert, in dem c nicht zwischen a und b liegt!

IV.3 Integrationsmethoden

In der Praxis muß man eine gewisse Menge elementarer (unbestimmter) Integrale auswendig können. Aus diesen kann man sich durch Anwendung geeigneter Regeln viele andere Integrale herleiten. Sehr nützlich sind auch Integrationstabellen, z.B. das Buch von Gradstein/Ryshik. Heutzutage gibt es auch Computeralgebraprogramme wie *Mathematica* oder *Maple*, die sogar unbestimmte Integrale bestimmen können.
Im folgenden wollen wir einige nützliche Integrationsverfahren vorstellen.

IV.3.1 Verifzierungsprinzip

Auf Grund des Hauptsatzes ist "Raten" einer Stammfunktion ein legitimes Mittel zur Integration. Hat man eine Stammfunktion $F(x)$ zu $f(x)$ "geraten", so ist

$$\int f(x)dx = F(x) \qquad \text{bzw.} \qquad \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)\,. \tag{IV.3.1}$$

Man muss allerdings verifizieren, dass F wirklich eine Stammfunktion ist. Dies macht man durch explizite Berechnung der Ableitung F' und Vergleich mit f.

Als Beispiel betrachten wir die Funktion

$$f(x) = xe^{x^2}\,. \tag{IV.3.2}$$

Als Stammfunktion raten wir

$$F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}\,, \tag{IV.3.3}$$

was wir durch Bildung der Ableitung unter Berücksichtigung der Kettenregel verifizieren:

$$F'(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} \cdot 2x = xe^{x^2} . \tag{IV.3.4}$$

Damit ist

$$\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2} . \tag{IV.3.5}$$

IV.3.2 Partielle Integration

Die partielle Integration ist gewissermaßen die Umkehrung der Produktregel der Differentiation. Sei $f(x) = g'(x)h(x)$, d.h. f ist Produkt der Ableitung einer Funktion g, die wir kennen, und einer Funktion h. Da nach Produktregel $\frac{d}{dx}(gh) = g'h + gh'$, folgt:

$$\int f(x)dx = \int \left[\frac{d}{dx}(gh) - gh'\right] dx = gh - \int gh'dx$$

bzw. als bestimmtes Integral

$$\boxed{\int_a^b g'(x)h(x)dx = g(x)h(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)h'(x)dx.}$$

Der Nutzen dieser Regel liegt darin, dass manchmal das Integral $\int gh'dx$ einfacher auszurechnen ist als $\int g'hdx$.
Wir wollen dies an einigen Beispielen illustrieren.

Beispiel IV.3.1.

1. Wir wollen $\int_a^b xe^x dx$ bestimmen. Dazu identifizieren wir e^x mit g, also $g'(x) = e^x$, und $h(x) = x$, d.h. $h'(x) = 1$. Damit ergibt sich aus der Regel der partiellen Integration:

$$\int_a^b xe^x dx = xe^x\Big|_a^b - \int_a^b 1 \cdot e^x dx = (xe^x - e^x)\Big|_a^b.$$

   Natürlich hätte man auch die Identifikation $g'(x) = x$ und $h(x) = e^x$ wählen können. Dann hätte aber die partielle Integration zu keiner Vereinfachung geführt, da immer höhere Potenzen von x auftreten würden.

2. Als zweites Beispiel betrachten wir $\int_a^b \ln x dx$. Hier hilft die Identifikation $g'(x) = 1$ und $h(x) = \ln x$:

$$\int_a^b \ln x dx = x \ln x\Big|_a^b - \int_a^b x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x\Big|_a^b - \int_a^b dx = (x \ln x - x)\Big|_a^b.$$

   Die Stammfunktion von $\ln x$ ist also $x \ln x - x$.

IV.3.3 Substitutionsregel

Die Substitutionsregel ist die Umkehrung der Kettenregel der Differentiation.
Wir betrachten eine Funktion f mit Stammfunktion F (die wir nicht explizit kennen müssen) und eine invertierbare Funktion $g(x)$. Nach der Kettenregel gilt dann:

$$F'(g(x))g'(x) = (F(g(x))' \, .$$

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt:

$$\begin{aligned} \int_a^b (F(g(x))' \, dx &= F(g(x))\big|_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) \\ &= F(x)\big|_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} F'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx \, , \end{aligned}$$

wobei wir in der zweiten Zeile wieder den Hauptsatz angewendet haben, diesmal für die Funktion F bzw. $F' = f$. Die linke Seite der obigen Gleichung können wir mit der Kettenregel umschreiben:

$$\int_a^b (F(g(x))' \, dx = \int_a^b F'(g(x))g'(x)dx = \int_a^b f(g(x))g'(x)dx \, .$$

Somit erhalten wir die Substitionsregel

$$\boxed{\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx = \int_a^b f(g(x))g'(x)dx}$$

oder auch (mit $\tilde{a} := g(a)$, $\tilde{b} := g(b)$)

$$\boxed{\int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f(x)dx = \int_{g^{-1}(\tilde{a})}^{g^{-1}(\tilde{b})} f(g(x))g'(x)dx \, .}$$

Die Form für unbestimmte Integrale

$$\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u)du$$

kann man sich leicht merken, wenn man $u'(x)$ als Differentialquotient $\frac{du}{dx}$ ausdrückt und dann quasi dx "wegkürzt". Man beachte, dass in dem rechten Integral u nicht mehr für eine Funktion steht, sondern die Integrationsvariable bezeichnet. Wir werden dies gleich in den Beispielen noch explizit sehen.
Die Substitutionsregel kann man in beide Richtungen (von links nach rechts oder von rechts nach links) anwenden. Manchmal ist es nützlich, durch Substitution mit einer geeigneten Funktion $u(x)$ zum scheinbar schwierigeren Integral auf der linken Seite überzugehen.

Beispiel IV.3.2.

1. $$\int_1^2 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{2x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_{g(1)=2}^{g(2)=5} \frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}\ln(x)\big|_3^5 = \frac{1}{2}(\ln(5)-\ln(2)) = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}$$
   wobei wir in der Substitionsregel (1. Form) $f(x) = \frac{1}{x}$ und $g(x) = 1 + x^2$ (d.h. $g'(x) = 2x$) gesetzt haben.

2. Ein Beispiel für eine "Physiker-Variante" der partiellen Integration:
   $$\int_1^7 \frac{1}{\sqrt{2x+2}}dx = \int_{g(1)=4}^{g(7)=16} \frac{1/2dy}{\sqrt{y}} = \frac{1}{2}\int_4^{16} y^{-1/2}dy = \frac{1}{2}2y^{1/2}\big|_4^{16} = 2\,.$$
   Hier haben wir mit $y = g(x) = 2x + 2$ substituiert. Damit ist
   $$\frac{dy}{dx} = 2 \qquad \text{d.h.} \quad dx = \frac{1}{2}dy\,.$$
   Der zweite Schritt ist mathematisch sehr fragwürdig[1], funktioniert aber (meistens). Dann haben wir im Integral dx durch $\frac{1}{2}dy$ und $\frac{1}{\sqrt{2x+2}}$ durch $\frac{1}{\sqrt{y}}$ ersetzt.

3. Ein ähnlicher Trick funktioniert auch für unbestimmte Integrale:
   $$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{\cos y\; dy}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \int \frac{\cos y\; dy}{\cos y} = \int dy = y = \arcsin x\,.$$
   Hier haben wir mit $x = \sin y$ substituiert, so dass $dx = \cos y\; dy$ ist. Im letzten Schritt haben wir dann die Substitution mit $y = \arcsin x$ rückgängig gemacht.

IV.4 Uneigentliche Integrale

In der Physik steht man häufig vor dem Problem, entweder Integrale über unbeschränkte Intervalle zu berechnen, bei denen eine oder beide Grenzen unendlich sind, oder aber dass der Integrand Polstellen hat. Man spricht dann auch von **uneigentlichen Integralen**. Im folgenden wollen wir uns ansehen, wie man in diesen Fällen vorgeht.

IV.4.1 Integration über ein unbeschränktes Intervall

Wir betrachten eine Funktion $f(x)$ und fragen uns, ob das Integral $\int_a^\infty f(x)dx$ über das unbeschränkte Intervall $[a, \infty[$ existiert. Dazu fassen wir es als den Grenzwert

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

[1] $\frac{df}{dx}$ ist ja kein Bruch, sondern eine Abkürzung für einen Grenzwert!

auf. Wir müssen also untersuchen, ob der Grenzwert überhaupt existiert. Eine offensichtliche Forderung, die $f(x)$ erfüllen muss, ist, dass die Funktion für $x \to \infty$ hinreichend schnell abfällt. Was das bedeutet, wollen wir an einem konkreten Beispiel untersuchen, das oft als Vergleichsfall herangezogen wird, nämlich die Potenzfunktion x^r.

Beispiel IV.4.1.

$$\begin{aligned}\int_a^\infty x^r dx &= \lim_{b\to\infty}\int_a^b x^r dx \underset{r\neq -1}{=} \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{r+1}x^{r+1}\Big|_a^b\right)\\ &= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{r+1}\left(b^{r+1}-a^{r+1}\right)\right] = \frac{1}{r+1}\lim_{b\to\infty} b^{r+1} - \frac{1}{r+1}a^{r+1}.\end{aligned}$$

Der Grenzwert existiert nur, falls $r+1<0$ ist. Dann ist nämlich $b^{r+1} = \frac{1}{b^{|r+1|}}$, was für große b gegen Null strebt. Für $r < -1$ gilt also

$$\int_a^\infty x^r dx = -\frac{1}{r+1}a^{r+1} = \frac{1}{|r+1|}\frac{1}{a^{|r+1|}}.$$

Für $r > -1$ ist b^{r+1} divergent und das uneigentliche Integral existiert nicht.

Zur Vollständigkeit sei noch der Fall $r = -1$ angegeben:

$$\int_a^\infty \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty} \ln x\Big|_a^b.$$

Auch hier existiert das Integral nicht, da $\ln b$ für $b \to \infty$ divergiert.

Zusammenfassend können wir also feststellen, dass das uneigentliche Integral der Potenzfunktion x^r über $[a,\infty[$ existiert, falls $r < -1$ ist.
Wie schon erwähnt, dient die Potenzfunktion als Vergleich, um die Existenz von uneigentlichen Integralen entscheiden zu können. Wir könnnen daher festhalten, dass $\int_a^\infty f(x)dx$ existiert, falls $f(x)$ für große x schneller als $1/x$ abfällt!

Zum Abschluss noch eine wichtige Bemerkung zum Fall, dass beide Grenzen unendlich sind, d.h. für die Integration über $]-\infty,\infty[$. Bei solchen Integralen, die an beiden Grenzen uneigentlich sind, ist die Konvergenz an beiden Grenzen *unabhängig* erforderlich!
Betrachten wir hierzu das Beispiel $\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{1+x^2}dx$. Offensichtlich gilt

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^a \frac{x}{1+x^2}dx = 0,$$

da der Integrand eine ungerade Funktion ist, die über das symmetrische Intervall $[-a,a]$ integriert wird. Allerdings existiert das Integral nicht, denn die unabhängige Konvergenz ist nicht erfüllt, da $\ln(1+x^2)$ Stammfunktion von $\frac{x}{1+x^2}$ ist (siehe das 2. Beispiel in Beispiel 5.3.2) und somit

$$\int_a^b \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left[\ln(1+b^2)-\ln(1+a^2)\right].$$

Dies divergiert offensichtlich für $b\to\infty$ als auch für $a\to-\infty$.

IV.4.2 Integration über Polstellen

Wir betrachten nun eine Funktion, die eine Polstelle bei x_0 hat. Auf Grund der Additivität des Integrals können die Überlegungen leicht auf den Fall mehrerer Polstellen verallgemeinert werden. Als Beispiel dient uns wieder die Potenzfunktion x^r, die für $r < 0$ einen Pol bei $x_0 = 0$ hat. Dazu definieren wir

$$\int_0^b x^r dx = \lim_{a \to 0+} \int_a^b x^r dx.$$

Dabei bedeutet $a \to 0+$, dass man den Grenzwert bildet, indem man sich nur von der rechten Seite, also $a > 0$ der Null nähert. Eine andere Schreibweise hierfür ist $a \searrow 0$.

Eine analoge Rechnung wie in Abschnitt IV.4.1 liefert dann, dass $\int_a^b x^r dx$ für $a \to 0+$ konvergiert, falls $r > -1$, und divergiert, falls $r \leq -1$.

Für den Fall mehrerer Polstellen oder in Kombination mit einer Integration über unbeschränkte Intervalle gelten wieder ähnliche Aussagen wie in Abschnitt IV.4.1, d.h. die Konvergenz muss unabhängig vorliegen!

IV.5 Differentialgleichungen

Bei der Integration haben wir es mit dem Problem zu tun, eine Funktion $y(x)$ aus ihrer bekannten Ableitung $y'(x) = f(x)$ zu bestimmen. Als Verallgemeinerung der Integration werden uns im folgenden immer wieder sogenannte **Differentialgleichungen (DGL)** begegnen.

In erster Linie werden wir es mit zwei Typen zu tun haben, den sog.
DGL 1. Ordnung: $f'(x) = H(x, f(x))$,
DGL 2. Ordnung: $f''(x) = H(x, f(x), f'(x))$.

Die fundamentale Gleichung der Mechanik, die *Newtonsche Bewegungsgleichung*

$$m\ddot{x}(t) = F(x,t)$$

ist ein Beispiel für eine DGL 2. Ordnung. Dabei ist $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ die Beschleunigung und $F(x,t)$ die zur Zeit t auf die am Ort x befindliche Masse m wirkende Kraft.

Die wichtigsten DGL sind:

1. Die Wachstumsgleichung

   $$\boxed{f'(x) = af(x)}$$

   mit der Lösung

   $$f(x) = Ae^{ax}\,,$$

   wobei $A \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist.

2. Die **Schwingungsgleichung**

$$\boxed{f''(x) + \omega^2 f(x) = 0}$$

mit der Lösung

$$f(x) = A\sin(\omega x) + B\cos(\omega x)$$

mit beliebigen (Integrations-)Konstanten A, B.

Kapitel V

Komplexe Zahlen

Beim Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren, Dividieren und Potenzieren von reellen Zahlen bleiben wir im Bereich der reellen Zahlen. Beim Wurzelziehen stoßen wir auf einen neuen Zahlentyp.

V.1 Grundlagen

Problem: $x^2 = -1$ hat keine reelle Lösung x

Man definiert daher[1] (Euler 1777): $i := \sqrt{-1}$.
i wird als **imaginäre Einheit** bezeichnet.

Eine allgemeine **imaginäre Zahl** ist dann von der Form $b \cdot i$ mit reellem b, also z.B. $2i$, πi, etc.

Wir übertragen nun die üblichen Rechenregeln der reellen Zahlen auf die imaginären Zahlen (unter Beachtung von $i^2 = -1$):

$$b_1 i + b_2 i = (b_1 + b_2) i$$

$$(b_1 i)(b_2 i) = b_1 b_2 i^2 = -b_1 b_2$$

$$i^3 = i^2 i = -i \qquad \text{etc.}$$

Definition V.1.1 (komplexe Zahlen)**.**
Allgemeine **komplexe Zahlen** sind von der Form

$$z = x + iy$$

mit reellen Zahlen x und y. x bezeichnet man auch als den **Realteil** von z und y als den **Imaginäerteil**. Man schreibt dann auch:

$$z = \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z).$$

[1]Man beachte, dass hier streng genommen die “positive” Wurzel gemeint ist.

Wie für die rein imaginären Zahlen übertragen wir auch für die komplexen Zahlen die bekannten Rechenregeln. Man erhält so den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.

$$\begin{aligned}\text{Addition: } z_3 &= z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\ &\quad \mathrm{Re}(z_3) = \mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2) \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(z_3) = \mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Multiplikation: } z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2) + i(x_1 y_2) + i(y_1 x_2) + i^2(y_1 y_2) \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)\end{aligned}$$

Speziell für reelles λ gilt:

$$\lambda z = \lambda(x + iy) = (\lambda x) + i(\lambda y)$$

Definition V.1.2 (Komplexe Konjugation)**.**
$z^* := x - iy$ heißt **komplex-konjugiert** zu $z = x + iy$, d.h. die Operation * bedeutet Vorzeichenwechsel beim Imaginärteil. Manchmal schreibt man auch $\bar{z}$ statt z^*.
Offensichtlich gilt: $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + z^*)$ und $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - z^*)$

Für das Produkt einer komplexen Zahl z mit ihrem komplex-konjugierten gilt

$$z \cdot z^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2.$$

Es ist also immer reell und größer gleich Null.

Nützlich ist das Komplex-Konjugierte auch bei der Division durch komplexe Zahlen:

$$\frac{1}{z} = \frac{z^*}{z \cdot z^*} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Hiermit ist die Division in $\mathbb{C}$ auf eine Multiplikation zurückgeführt.

Definition V.1.3 (Betrag)**.**
Man definiert den **Betrag** $|z|$ einer komplexen Zahl z durch $\boxed{|z| = \sqrt{zz^*}}$.
Für ihn gelten analoge Rechenregeln wie für den Betrag von reellen Zahlen, z.B. die Dreiecksungleichung.

V.2 Darstellung in komplexer Ebene

Es bietet sich an, Real- und Imaginärteil als Komponenten eines zweidimensionalen Vektors zu interpretieren. Man kommt so zu der zweidimensionalen Darstellung in der sog. **komplexen Ebene** (siehe Abb. V.2.1):

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \to \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

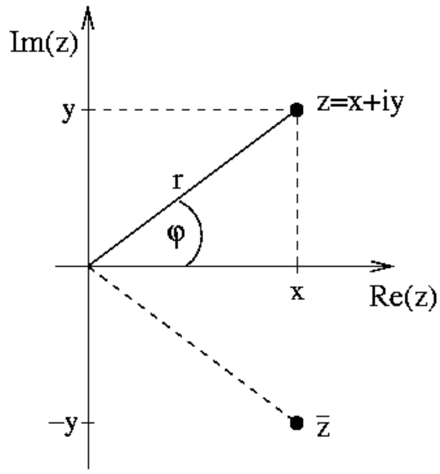

Abbildung V.2.1: Die komplexe Ebene. Die Darstellung wird auch als **Argand-Diagramm** bezeichnet. Dargestellt sind eine komplexe Zahl $z = x + iy$ und ihr Komplex-Konjugiertes $\bar{z} = x - iy$.

wobei nun $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ein zweidimensionaler Vektor ist. Nun kann man wieder zu ebenen Polarkoordinaten $x = r\cos\phi$ und $y = r\sin\phi$ übergehen und erhält

$$z = x + iy = r(\cos\phi + i\sin\phi).$$

Eine einfache geometrische Überlegung liefert $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, d.h. $r = |z|$. Man bezeichnet den Betrag von z in diesem Zusammenhang auch manchmal als **Modul** oder **Modulus** von z und schreibt $r = \text{mod}(z)$.
Den Winkel ϕ in der Polarkoordinatendarstellung bezeichnet man auch als **Argument** von z: $\phi = \arg(z)$.
Insgesamt hat man daher folgende Darstellung einer komplexen Zahl:

$$\boxed{z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi).}$$

Es gilt nun die **Eulersche Formel**:

$$\boxed{e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi}$$

d.h. die komplexe Zahl $e^{i\phi}$ mit $\phi \in \mathbb{R}$ liegt auf dem Einheitskreis (da $|e^{i\phi}|^2 = \cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$) mit Winkel ϕ.
Wir können daher für reelle ϕ den Real- und Imaginärteil der Exponentialfunktion bestimmen:

$$\begin{aligned} \text{Re}(e^{i\phi}) &= \cos\phi, \\ \text{Im}(e^{i\phi}) &= \sin\phi. \end{aligned}$$

Die Eulersche Formel kann man als Erweiterung der Exponentialfunktion auf imaginäre Argumente auffassen. Es sollen die gleichen Rechenregeln wie im Reellen gelten. Wir werden die Euler-Formel morgen mit Hilfe von Potenzreihen beweisen.

Mit der Eulerschen Formel können wir nun eine beliebige komplexe Zahl darstellen als

$$\boxed{z \;=\; |z|e^{i\phi}.}$$

Hiermit macht man sich die folgenden Rechenregeln für den Betrag und das Argument klar:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|e^{i\phi_1} \cdot |z_2|e^{i\phi_2} = |z_1 z_2|e^{i(\phi_1+\phi_2)}.$$

Speziell für das Komplex-Konjugierte folgt:

$$z^* = |z|(\cos\phi - i\sin\phi) = |z|(\cos(-\phi) + i\sin(-\phi)) = |z|e^{-i\phi}$$

Allgemein gilt folgende Aussage: Ist $f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ reellwertig, so gilt: $f(z^*) = (f(z))^*$.

Unter Benutzung der Rechenregeln für die Exponentialfunktion, die analog für komplexe Argumente gelten, können wir die Eulersche Formel auf beliebige $z = x + iy$ verallgemeinern:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x\left(\cos y + i\sin y\right).$$

V.3 Komplexe Funktionen

Mit komplexen Zahlen kann man komplexe Funktionen bilden: $f(z) \in \mathbb{C}$, z.B. $f(z) = 2z^2 + z$. Man kann nun auch die Winkelfunktionen durch die komplexe Exponentialfunktion darstellen. Da $e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$ und $e^{-i\phi} = \cos(-\phi) + i\sin(-\phi) = \cos\phi - i\sin\phi$, folgt

$$\boxed{\cos\phi = \frac{1}{2}(e^{i\phi} + e^{-i\phi}) \qquad \text{und} \qquad \sin\phi = \frac{1}{2i}(e^{i\phi} - e^{-i\phi}).}$$

V.3.1 Anwendung: Additionstheoreme

Der gerade abgeleitete Zusammenhang der trigonometrischen Funktionen mit der komplexen Exponentialfunktion enorm nützlich. Zum Beispiel lassen sich mit ihnen die bekannten Additionstheoreme für die trigonometrischen Funktionen einfach beweisen. Letztlich führt man sie auf die Eigenschaften der Expontialfunktion zurück. Dies werden wir nun genauer untersuchen.
Als Beispiel betrachten wir

$$\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\varphi_1\,. \tag{V.3.1}$$

Um diese Beziehung zu beweisen, beginnen wir auf der rechten Seite und drücken dort $\sin$ und $\cos$ durch die Expontialfunktion aus:

$$\begin{aligned}
\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_2\cos\varphi_1 &= \frac{1}{2i}\left[e^{i\varphi_1}-e^{-i\varphi_1}\right]\frac{1}{2}\left[e^{i\varphi_2}+e^{-i\varphi_2}\right]\\
&+ \frac{1}{2i}\left[e^{i\varphi_2}-e^{-i\varphi_2}\right]\frac{1}{2}\left[e^{i\varphi_1}+e^{-i\varphi_1}\right]\\
&= \frac{1}{4i}\Big[e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}+e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}-e^{i(-\varphi_1+\varphi_2)}-e^{-i(\varphi_1+\varphi_2)}\\
&\quad +e^{i(\varphi_2+\varphi_1)}+e^{i(\varphi_2-\varphi_1)}-e^{i(-\varphi_2+\varphi_1)}-e^{-i(\varphi_1+\varphi_2)}\Big]\\
&= \frac{1}{2i}\left[e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}-e^{-i(\varphi_1+\varphi_2)}\right]=\sin(\varphi_1+\varphi_2)\,. \qquad \text{(V.3.2)}
\end{aligned}$$

Weitere Additionstheoreme kann man analog beweisen. Der große Vorteil bei Verwendung von komplexen Exponentialfunktionen anstelle der trigonometrischen Funktionen sind die einfacheren Rechenregeln. Man muss die Additionstheoreme gar nicht explizit kennen, sie stecken im Prinzip schon in den Rechenregeln für die Exponentialfunktion.