Vorkurs Physik
SS 2018

Lineare Algebra

Berenike Maier

Themen

Literaturempfehlungen

- Mathematischer Einführungskurs für die Physik (Teubner Studienbücher, 410 Seiten) von Siegfried Großmann
- Mathematik (Spektrum Akademischer Verlag, 1520 Seiten) von T. Arens, F. Hettlich, C, Karpfinger, U. Kuckelkorn, K. Kichtenegger, und H. Stachel
- Taschenbuch der Mathematik von I.N. Bronstein und K.A. Semendjajew -> Formelsammlung

1. Einführung

Vektoren stellen gerichtete Größen dar, d. h. sie haben Betrag und Richtung

anschaulich: Pfeile

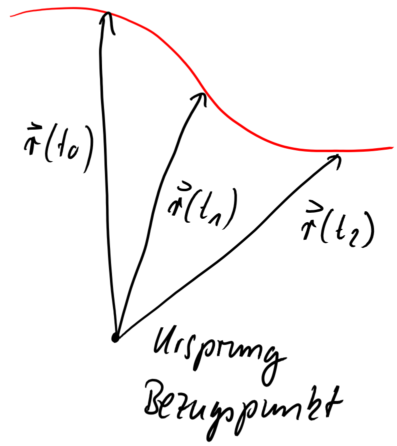
$\vec{v}$

Beispiele: Geschwindigkeit $\vec{v}$, Kraft $\vec{F}$,
Drehbewegung: Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$

Skalare haben keine Richtung

Beispiele: Temperatur T, Masse m, Zeit t

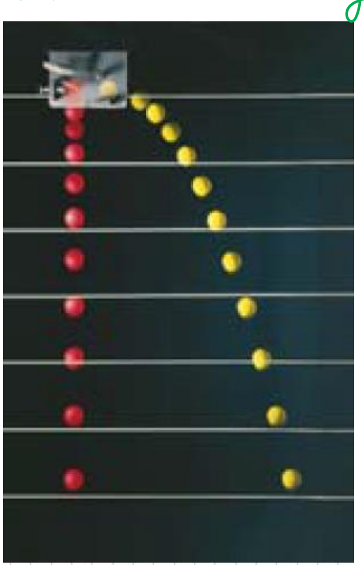
Bewegung in 2 oder 3 Raumrichtungen

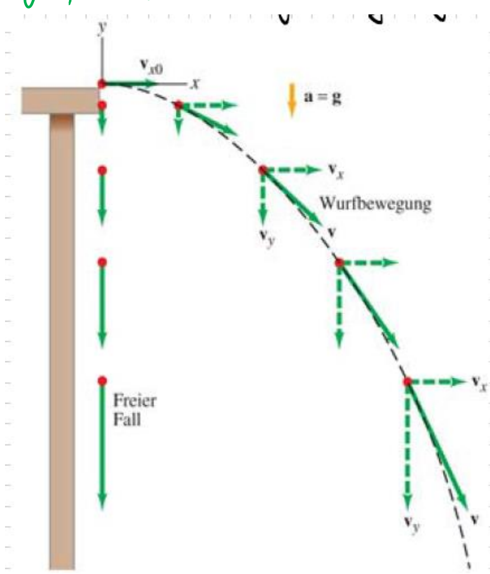


Geschwindigkeit $\vec v$

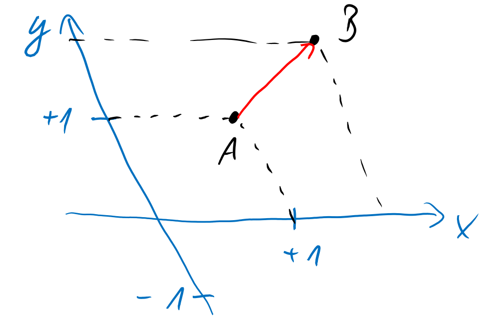
Bsp. Beschleunigte Bewegung $\vec F = m\vec g = m\vec a$

$F = mg$ in vertikaler Richtung $a_y = g$; $a_x = 0$



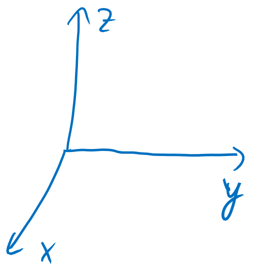


1.1 Koordinatensysteme



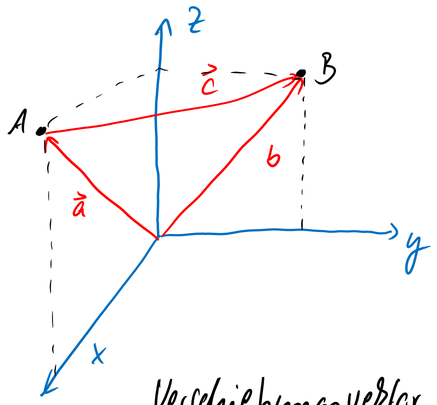
1. Wähle willkürlich Ursprung
2. Wähle Achsen, die nicht parallel sind
3. Versehe Achsen mit Maßstab

Orthonormalsystem im 3 dim. Raum



Achsen paarweise $\perp$
gleiche Maßstäbe
rechtshändig

1.2 Kartesisches Koordinatensystem



Koordinaten von A: $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{a}$

B: $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{b}$

Vektor von A nach B: $\overrightarrow{AB} := \vec{c}$

Verschiebungsvektor $\vec{c} = -\vec{a} + \vec{b} = -\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Vektor ist definiert durch Länge und Richtung

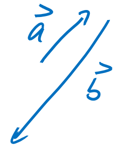
Alle parallelen, gleichlangen „Pfeile" äquivalent

Vektor repräsentiert alle gleichlangen, parallelen Pfeile

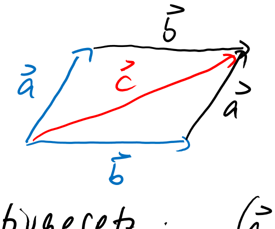
2. Rechnen mit Vektoren

2.1 Rechenregeln

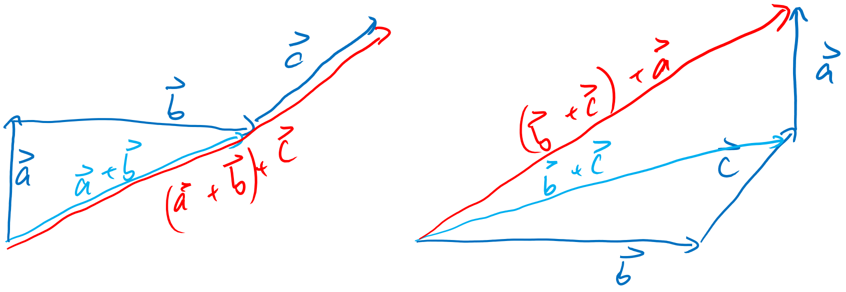
- Skalare Multiplikation $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$



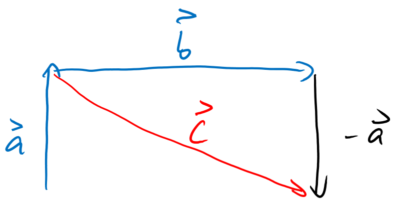
- Addition $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (Kommutativgesetz)



- Assoziativgesetz: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$



- Subtraktion



$$\vec c = +\vec b - \vec a$$

Zusammenfassung:

Der Vektorraum V ist eine abelsche Gruppe bzgl. der Addition

1. Zu je 2 Vektoren existiert eine Verknüpfung, die den beiden Vektoren einen anderen Vektor zuordnet. Die Verknüpfung ist kommutativ und wird Addition genannt.
   $\vec a \in V$ und $\vec b \in V \curvearrowright \vec a + \vec b \in V$

2. Die Verknüpfung ist assoziativ;
   $\vec a + (\vec b + \vec c) = (\vec a + \vec b) + \vec c =: \vec a + \vec b + \vec c$

3. Es gibt ein neutrales Element, genannt $0 \in V$, mit der Eigen-

schaft
$\vec{a} + 0 = \vec{a}$ für alle $\vec{a} \in V$

4. Zu jedem Element $\vec{a} \in V$ gibt es ein „Inverses", eindeutig definiert als $\vec{a} + \vec{x} = 0$. Wir bezeichnen das lösende Element $\vec{x} \in V$ mit $-\vec{a}$

Ferner gilt:

a) In V ist die Multiplikation mit Zahlen aus $\mathbb{R}$ erklärt.
$\alpha \in \mathbb{R}$, $\vec{a} \in V$, $\alpha \vec{a} \in V$.

b) Distributivgesetze
$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b}$
$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{a}$

c) Assoziativgesetz
$\alpha(\beta \vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a} =: \alpha\beta\vec{a}$

d) Es existiert ein Einselement mit $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

$\rightsquigarrow$ Die Menge der Vektoren V bilden einen linearen Raum

Die drei Einheitsvektoren $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ bilden ein vollständiges Orthonormal-system.

vollständig: jeder Vektor läßt sich nach ihnen entwickeln

ortho: Vektoren stehen senkrecht aufeinander

normal: normiert

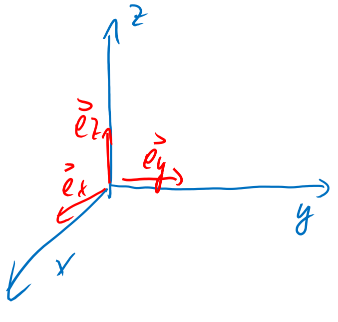
3. Basisvektoren

3.1 Einheitsvektoren

$\vec{e}$ mit $|\vec{e}| = 1$

Zu jedem $\vec{a}$ existiert eine Zahl α, so daß $|\alpha \vec{a}| = 1$

$$\alpha = \frac{1}{|\vec{a}|} \Rightarrow |\alpha \vec{a}| = \left| \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} \right| = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|} = 1$$



$$\vec{a}_1 = x_1 \vec{e}_x + y_1 \vec{e}_y + z_1 \vec{e}_z := \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_2 = x_2 \vec{e}_x + y_2 \vec{e}_y + z_2 \vec{e}_z := \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (x_1 + x_2)\vec{e}_x + (y_1 + y_2)\vec{e}_y + (z_1 + z_2)\vec{e}_z = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha \vec{a}_1 = \alpha(x_1 \vec{e}_x + y_1 \vec{e}_y + z_1 \vec{e}_z) = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \\ \alpha z_1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_x = 1 \cdot \vec{e}_x + 0 \cdot \vec{e}_y + 0 \cdot \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.2 Lineare Abhängigkeit

Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ sind linear abhängig, wenn gilt

$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = 0$ mit $\alpha_i \neq 0$ für mindestens ein i

Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ sind linear unabhängig, wenn gilt

$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = 0$ mit $\alpha_i = 0 \ \forall i$

$\Rightarrow$ $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ sind linear unabhängig

$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, \vec{a}$ sind linear abhängig, denn

$\vec{a} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ also

$\vec{a} - x\vec{e}_x - y\vec{e}_y - z\vec{e}_z = 0$

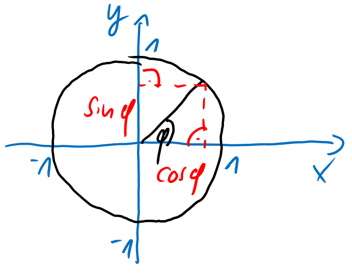
Die Dimension eines Vektorraums V = maximale Anzahl der linear unabhängigen Vektoren

$\Leftrightarrow$ linear unabhängige Vektoren bilden Basis des Vektorraums

4. Trigonometrische Funktionen

Einheitskreis

Umfang $U = 2\pi R = 2\pi$



Für $0 \leq \varphi \leq 180°$ (π) $\quad 0 \leq \sin\varphi \leq 1$

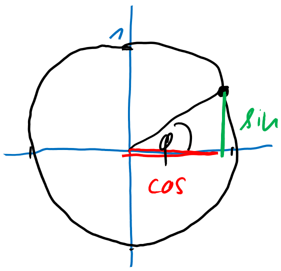
Für $180° \leq \varphi \leq 360°$ (2π) $\quad 0 \geq \sin\varphi \geq -1$

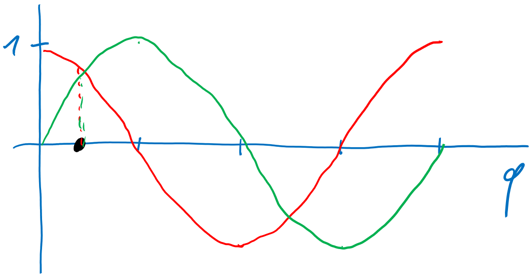
Für $0 \leq \varphi \leq 90°$ $(\frac{\pi}{2})$
$270° \leq \varphi \leq 360°$ $\Big\} \quad 0 \leq \cos\varphi \leq 1$

Für $90° \leq \varphi \leq 270°$ $\quad 0 \geq \cos\varphi \geq -1$

Bogenmaß : $\dfrac{x}{2\pi} = \dfrac{\varphi}{360°}$

$\cos(-\varphi) = \cos\varphi \quad ; \quad \sin(-\varphi) = -\sin\varphi$



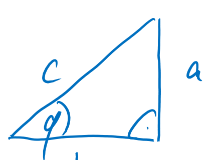


$\sin(\pi - \varphi) = \sin\varphi \quad ; \quad \sin(\varphi + 2\pi) = \sin\varphi$

$\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\varphi$

$\alpha =$	$\frac{\pi}{2} \pm \varphi$	$\pi \pm \varphi$	$\frac{3\pi}{2} \pm \varphi$	$2\pi \pm \varphi$
$\sin\alpha$	$\cos\varphi$	$\mp\sin\varphi$	$-\cos\varphi$	$\pm\sin\varphi$
$\cos\alpha$	$\mp\sin\varphi$	$-\cos\varphi$	$\pm\sin\varphi$	$+\cos\varphi$

Rechtwinkliges Dreieck



$a = c\sin\varphi$

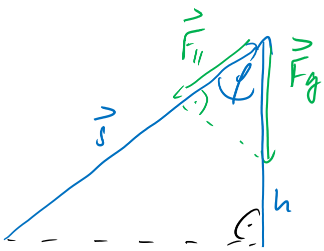
$b = c\cos\varphi$

$a^2 + b^2 = c^2 \quad$ bzw. $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1 \quad ; \quad \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$

5. Das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ „inneres Produkt"

Welche Arbeit verrichtet ein Bergsteiger beim Erklimmen des Matterhorns?

„Arbeit = Kraft mal Weg"



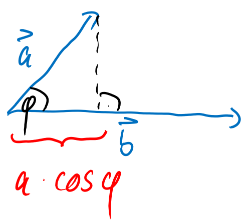
$$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}_{\parallel}| = |\vec{F}| \, (|\vec{s}| \cos\varphi) = |\vec{F}| \cdot h = |\vec{F}_{\parallel}| \, |\vec{s}| = (|\vec{F}| \cos\varphi) \, |\vec{s}|$$

$$\boxed{W := \vec{F} \cdot \vec{s}}$$

5.1 Definition und Gesetze

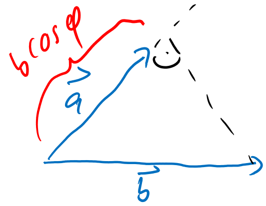
$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} := |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$ mit $\varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$



$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cos\varphi \, |\vec{b}| =$

$= a\, b \cos\varphi$



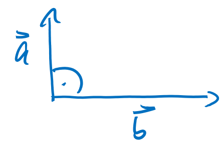
$\vec{b} \cdot \vec{a} =$

$= |\vec{b}| \cos\varphi \, |\vec{a}| =$

$= a\, b \cos\varphi$

Kommutativgesetz: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

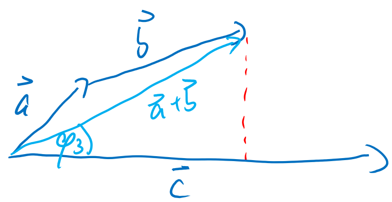
orthogonale Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

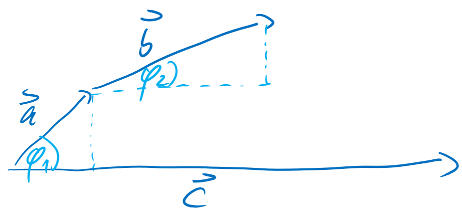


Projektion $= 0$

Distributivgesetz: $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

$|\vec{a} + \vec{b}| \cdot c \cdot \cos\varphi_3 = a c \cos\varphi_1 + b c \cos\varphi_2$





Bilinearität: $\alpha \in \mathbb{R}$; $\vec{a}, \vec{b} \in V$

$\vec{a}(\alpha \vec{b}) = \alpha\, \vec{a} \cdot \vec{b} = (\alpha \vec{a})\, \vec{b}$

Betrag eines Vektors: $a := |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{a^2 \underbrace{\cos 0}_{1}} = a$

Schwarz'sche Ungleichung: $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \le ab$

$|\vec{a}\cdot\vec{b}| = |a\cdot b\cdot\cos\varphi| \le ab$ da $\cos\varphi < 1$

Dreiecksungleichung: $|a-b| \le |\vec{a}+\vec{b}| \le a+b$

Beweis: $-ab \le \vec{a}\cdot\vec{b} \le ab \quad |\cdot 2 + a^2+b^2$ (Schwarz'sche Ungl.)

$$a^2 - 2ab + b^2 \le a^2 + 2\vec{a}\vec{b} + b^2 \le a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 \le (\vec{a}+\vec{b})^2 \le (a+b)^2$$

$$|a-b| \le |\vec{a}+\vec{b}| \le a+b \qquad \text{q.e.d.}$$

5.2 Rechnen mit Skalarprodukten in kartesischen Koordinaten

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left(x_a\vec{e}_x + y_a\vec{e}_y + z_a\vec{e}_z\right)\cdot\left(x_b\vec{e}_x + y_b\vec{e}_y + z_b\vec{e}_z\right) =$$

$$= x_a x_b \underbrace{\vec{e}_x^{\,2}}_{1} + x_a y_b \underbrace{\vec{e}_x\vec{e}_y}_{0} + x_a z_b \underbrace{\vec{e}_x\vec{e}_z}_{0} +$$

$$+ y_a x_a \underbrace{\vec{e}_y\vec{e}_x}_{0} + y_a y_b \underbrace{\vec{e}_y\vec{e}_y}_{1} + y_a z_b \underbrace{\vec{e}_y\vec{e}_z}_{0} +$$

$$+ z_a x_b \underbrace{\vec{e}_z\vec{e}_x}_{0} + z_a y_b \underbrace{\vec{e}_z\vec{e}_y}_{0} + z_a z_b \underbrace{\vec{e}_z\vec{e}_z}_{1} =$$

$$\vec{e}_x \perp \vec{e}_y \perp \vec{e}_z$$

$$= x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$$

Bsp. 1 $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

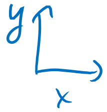
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 3 + 4 - 1 = 6$$

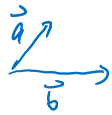
Längen: $a = \sqrt{\vec{a}^{\,2}} = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$

$b = \sqrt{\vec{b}^{\,2}} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab} = \frac{6}{\sqrt{14}\sqrt{6}} \approx 0.65 \Rightarrow \varphi \approx 49°$$

Bsp. 2





$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$a = \sqrt{2}$; $b = 2$; $\cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{ab} = \frac{2}{\sqrt{2}\,2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Beweis der Bilinearität:

$\vec{a}(\alpha\vec{b}) = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_2\vec{e}_3)(\alpha b_1\vec{e}_1 + \alpha b_2\vec{e}_2 + \alpha b_3\vec{e}_3) =$

$= a_1\alpha b_1 + a_2\alpha b_2 + a_3\alpha b_3 = \alpha(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) = \alpha(\vec{a}\,\vec{b}) =$

$= \alpha a_1 b_1 + \alpha a_2 b_2 + \alpha a_3 b_3 = (\alpha\vec{a})\vec{b}$

5.3 Schreibweisen und Abkürzungen

Einsteinsche Summenkonvention: Summation über mehrfach auftretende Indizes

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} a_i b_i =: a_i b_i$$

Kronecker-Delta:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases}$$

Bsp. 1 $\quad a = \sqrt{\vec{a}^{\,2}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} a_k^2} = \sqrt{a_k a_k}$

Bsp. 2 $\quad \delta_{jj} = \sum_{j=1}^{3} \delta_{jj} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$

Bsp. 3 $\quad \delta_{jl}\delta_{lk} = \sum_{l=1}^{3} \delta_{jl}\delta_{lk} = \underbrace{\delta_{j1}\delta_{1k}}_{\substack{1 \text{ für } j=k=1 \\ 0 \text{ sonst}}} + \underset{\substack{1 \text{ für } j=k=2 \\ 0 \text{ sonst}}}{\delta_{j2}\delta_{2k}} + \underbrace{\delta_{j3}\delta_{3k}}_{\substack{1 \text{ für } j=k=3 \\ 0 \text{ sonst}}} =$

$$= \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{für } j = k \\ 0 & \text{für } j \neq k \end{cases}$$

Bsp. 4 $\quad a_k \delta_{kl} = \sum_{k=1}^{3} a_k \delta_{kl} = a_1\delta_{1l} + a_2\delta_{2l} + a_3\delta_{3l} = a_l$

Bsp. 5 $\quad \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$ $\qquad$ (keine Summenkonvention!)

Bsp. 6 $\quad c_k a_j a_l b_k \delta_{jl} = \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} c_k b_k \underbrace{a_j a_l \delta_{jl}}_{\substack{a_j^2 \text{ für } j=l \\ 0 \text{ sonst}}} =$

$$= \sum_{k=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} c_k b_k a_j^2 = \sum_{k=1}^{3} c_k b_k \sum_{j=1}^{3} a_j^2 =$$

$$= \vec{c} \cdot \vec{b} \cdot \vec{a}^2 = a^2 \cdot \vec{b}\,\vec{c}$$

Schritt-für-Schritt: $\sum_{l=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_j a_l \delta_{jl} =$

$$= \sum_{j=1}^{3} a_j a_1 \delta_{j1} + a_j a_2 \delta_{j2} + a_j a_3 \delta_{j3} =$$

$$= \underbrace{a_1 a_1 \delta_{11}}_{a_1^2} + a_1 a_2 \underbrace{\delta_{12}}_{0} + a_1 a_3 \underbrace{\delta_{13}}_{0} +$$

$$+ a_2 a_1 \underbrace{\delta_{21}}_{0} + \underbrace{a_2 a_2 \delta_{22}}_{a_2^2} + a_2 a_3 \underbrace{\delta_{23}}_{0} +$$

$$+ a_3 a_1 \underbrace{\delta_{31}}_{0} + a_3 a_2 \underbrace{\delta_{32}}_{0} + \underbrace{a_3 a_3 \delta_{33}}_{a_3 a_3} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \vec{a}^2$$

<u>Bsp. 7</u> $\delta_{il} \delta_{lm} \delta_{mn} \delta_{nk} = \sum_{l=1}^{3} \sum_{m=1}^{3} \sum_{n=1}^{3} \delta_{il} \delta_{lm} \delta_{mn} \delta_{nk} =$

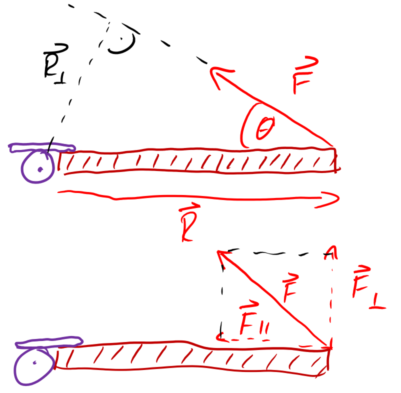
$$= \sum_{m=1}^{3} \sum_{n=1}^{3} \delta_{mn} \delta_{nk} \Big[\underbrace{\delta_{i1} \delta_{1m}}_{\substack{1 \text{ für } i=m=1 \\ 0 \text{ sonst}}} + \underbrace{\delta_{i2} \delta_{2m}}_{\substack{1 \text{ für } i=m=2 \\ 0 \text{ sonst}}} + \underbrace{\delta_{i3} \delta_{3m}}_{\substack{1 \text{ für } i=m=3 \\ 0 \text{ sonst}}} \Big] =$$

$$= \sum_{m=1}^{3} \sum_{n=1}^{3} \underbrace{\delta_{mn} \delta_{nk}}_{\substack{1 \text{ für } m=k \\ 0 \text{ sonst}}} \delta_{im} = \sum_{m=1}^{k} \underbrace{\delta_{mk} \delta_{im}}_{\substack{1 \text{ für } k=i \\ 0 \text{ sonst}}} = \delta_{ik}$$

Bsp. 8 $\underbrace{\delta_{jl}\delta_{lj}}_{\delta_{jj}}\ \underbrace{\delta_{mn}\delta_{nm}}_{\delta_{mm}} = \sum_{j=1}^{3} \delta_{jj} \cdot \sum_{m=1}^{3} \delta_{mm} = 3 \cdot 3 = 9$

6 Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ „äußeres Produkt"

Bsp. Drehmoment $\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F}$

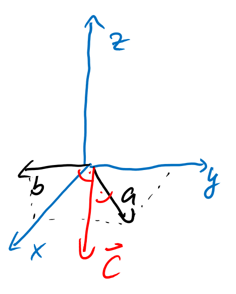


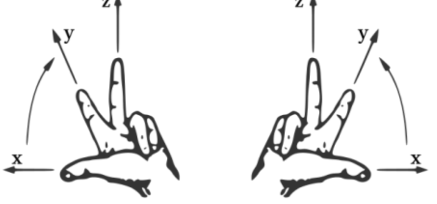
$$M = |\vec{R}_\perp| \cdot |\vec{F}| = $$
$$= |\vec{F}_\perp| \cdot |\vec{R}| = $$
$$= R \cdot F \cdot \sin\theta$$

6.1 Definition und Gesetze

$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ mit

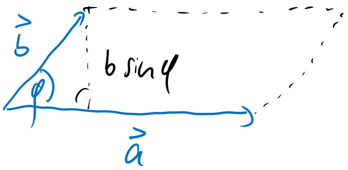
1) $c = ab \sin\varphi$ mit $\varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$
2) $\vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$
3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden ein rechtshändiges System





Linkshändiges Koordinatensystem
Mathematisch negativer Drehsinn
=Geodätisch positiver Drehsinn

Rechtshändiges Koordinatensystem
Mathematisch positiver Drehsinn
=Geodätisch negativer Drehsinn



$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$

$|\vec{c}|$: Fläche des Parallelogramms

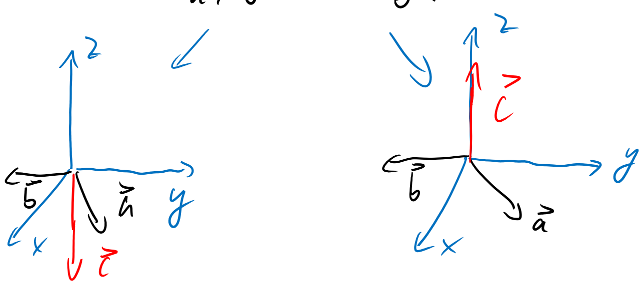
$\vec{a} \times \vec{b} = 0$ falls

1) $\vec{a} = 0$ oder $\vec{b} = 0$

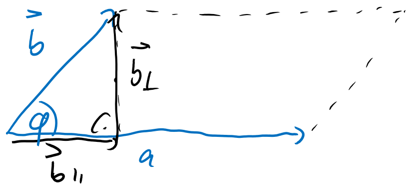
2) $\vec{b} = \alpha \vec{a}$ $\curvearrowright$ parallele Vektoren spannen keine Fläche auf

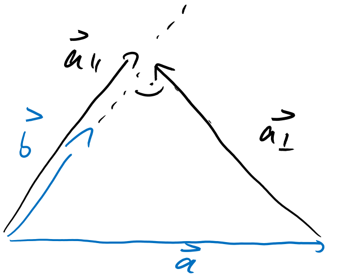
Anti-kommutativ:

$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$



$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}_\perp = \vec{a}_\perp \times \vec{b} = \vec{c}$$





$$\vec{b} = \vec{b}_\parallel + \vec{b}_\perp$$

$$|\vec{b}_\perp| = b \sin\varphi$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}_\perp| = a b_\perp \sin 90^\circ =$$

$$= a b_\perp = a b \sin\varphi$$

$$\vec{a} = \vec{a}_\parallel + \vec{a}_\perp$$

$$|\vec{a}_\perp| = a \sin\varphi$$

$$|\vec{a}_\perp \times \vec{b}| = a_\perp b \sin 90^\circ =$$

$$= a_\perp b = a b \sin\varphi$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times (\vec{b}_\perp + \vec{b}_\parallel) = \vec{a} \times \vec{b}_\perp + \underbrace{\vec{a} \times \vec{b}_\parallel}_{0}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (\vec{a}_\perp + \vec{a}_\parallel) \times \vec{b} = \vec{a}_\perp \times \vec{b} + \underbrace{\vec{a}_\parallel \times \vec{b}}_{0}$$

<u>Bilinearität</u>

$\lambda \in \mathbb{R}$: $\quad (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \times b)$

Beweis: $\lambda \geq 0$

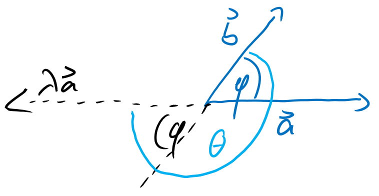
$$|(\lambda \vec{a}) \times \vec{b}| = (\lambda a) b \sin\varphi = a (\lambda b) \sin\varphi = \lambda (a b \sin\varphi)$$

$\lambda < 0$: $\quad \lambda(\vec{a}\times\vec{b}) = \lambda\vec{c} = -|\lambda|\,\vec{c}$ mit $|\vec{c}| = ab\sin\varphi$

$(\lambda\vec{a})\times\vec{b} = (-|\lambda|\,\vec{a})\times\vec{b} = -|\lambda|\,\vec{c}$

denn $|\lambda|\,ab\sin\theta = -|\lambda|\,ab\sin\varphi$

$\varphi + \pi = \theta$ und $\sin(\pi+\varphi) = \sin\theta = -\sin\varphi$



$\vec{a}\times(\lambda\vec{b}) = \vec{a}\times(-|\lambda|\,\vec{b}) = -|\lambda|\,\vec{c}$

denn $a\,|\lambda|\,b\sin\theta = -|\lambda|\,ab\sin\varphi$

Distributivgesetz

$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$

Bew.: $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{a}\times\vec{b}_\perp \quad ; \quad \vec{a}\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c}_\perp$

$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})_\perp$ denn $\vec{b}+\vec{c} = (\vec{b}+\vec{c})_\parallel + (\vec{b}+\vec{c})_\perp$

Bildung des Orthogonalteils ist eine additive Operation

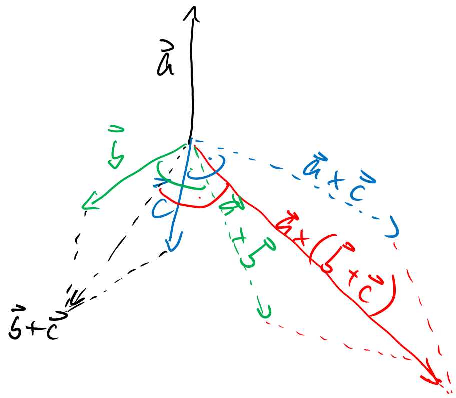
$\vec{r}_\perp = \vec{r} - \vec{r}_\parallel$ daher

$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times(\vec{b}_\perp + \vec{c}_\perp)$

Beweise $\vec{a}\times(\vec{b}_\perp + \vec{c}_\perp) \overset{?}{=} \vec{a}\times\vec{b}_\perp + \vec{a}\times\vec{c}_\perp$!

o.B.d.A $\vec{b} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{a}$ und $(\vec{b}+\vec{c}) \perp \vec{a}$

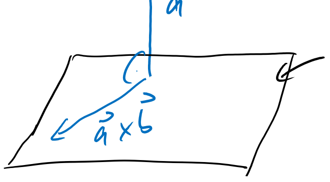
(andere Komponenten gehen nicht ein!)



$\Rightarrow \quad \vec{a} \times (\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$

Ferner gilt $\vec{a}\times\vec{a} = 0$ da $\sin(0°) = 0$

$\vec{a} \cdot (\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}(\vec{a}\times\vec{b}) = 0$ denn



$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{c} \perp \vec{a},\vec{b}$

$\vec{a}\cdot\vec{c} = ac\cos\varphi = 0$

$\vec{b}\cdot\vec{c} = bc\cos\varphi = 0$

da $\cos 90° = 0$

Vektorprodukt ist nicht assoziativ: $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} \neq \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$

denn $\vec{a}\times\vec{b} \perp \vec{a},\vec{b}$ Ebene $\Rightarrow$ $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ liegt in $\vec{a},\vec{b}$ Ebene

$\vec{b}\times\vec{c} \perp \vec{b},\vec{c}$ Ebene $\Rightarrow$ $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ liegt in $\vec{b},\vec{c}$ Ebene

Ausnahme: $\vec{a}=0$, etc. oder $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=0$ $\Leftrightarrow$ $\vec{c}$ liegt auch in $\vec{a},\vec{b}$ Ebene

7. Rechnen mit Vektorprodukt in kartesischen Koordinaten

$\vec{e}_x\times\vec{e}_y = \vec{e}_z$; $\vec{e}_y\times\vec{e}_x = -\vec{e}_z$ denn $\vec{e}_j \perp \vec{e}_i$ für $i\neq j$ und $|\vec{e}_i| = 1$

$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ rechtshändig

allgemein:

$$\vec{e}_i\times\vec{e}_j = \begin{cases} \vec{e}_k & \text{für } i,j,k \text{ zyklisch} \\ -\vec{e}_k & \text{für } i,j,k \text{ antizyklisch} \end{cases}$$

zyklisch 1-2-3 ; 2-3-1 ; 3-1-2 ; x-y-z ; y-z-x, ...

antizyklisch 1-3-2 ; 3-2-1 ; 2-1-3

Abkürzung: Levi - Civita Tensor (total antisymmetrischer Tensor 3. Stufe)

$$\varepsilon_{ijk} = \vec{e}_i \cdot (\vec{e}_j \times \vec{e}_k) = \begin{cases} 1 & \text{für } i,j,k \text{ zyklisch} \\ -1 & \text{für } i,j,k \text{ antizyklisch} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, \vec{e}_k = \varepsilon_{ijk}\, \vec{e}_k$$

(Summenkonvention!)

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= (a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3) \times (b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3) = \\
&= a_1 b_1 \underbrace{(\vec{e}_1 \times \vec{e}_1)}_{0} + a_1 b_2 \underbrace{(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2)}_{\vec{e}_3} + a_1 b_3 \underbrace{(\vec{e}_1 \times \vec{e}_3)}_{-\vec{e}_2} + \\
&+ a_2 b_1 \underbrace{(\vec{e}_2 \times \vec{e}_1)}_{-\vec{e}_3} + a_2 b_2 \underbrace{(\vec{e}_2 \times \vec{e}_2)}_{0} + a_2 b_3 \underbrace{(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3)}_{\vec{e}_1} + \\
&+ a_3 b_1 \underbrace{(\vec{e}_3 \times \vec{e}_1)}_{\vec{e}_2} + a_3 b_2 \underbrace{(\vec{e}_3 \times \vec{b}_2)}_{-\vec{e}_1} + a_3 b_3 \underbrace{(\vec{e}_3 \times \vec{e}_3)}_{0} = \\
&= (a_2 b_3 - a_3 b_2)\, \vec{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\, \vec{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, \vec{e}_3
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}}$$

zyklisch - antizyklisch

Konstruktion:

$$\left|\begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} e_1 & e_2 \\ a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} & \vec{e}_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ = & + \vec{e}_2 (a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ & + \vec{e}_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{matrix} \Bigg)$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = a_i \vec{e}_i \times b_j \vec{e}_j = a_i b_j \, \vec{e}_i \times \vec{e}_j =$$

$$= a_i b_j \, \varepsilon_{ijk} \, \vec{e}_k = c_k \vec{e}_k$$

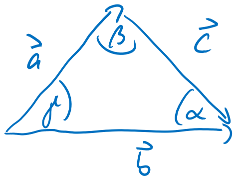
mit $c_k = \varepsilon_{ijk} \, a_i b_j = \sum_{i,j=1}^{3} a_i b_j \, \varepsilon_{ijk}$

$c_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2$

$c_2 = a_3 b_1 - b_1 a_3$

$c_3 = a_1 b_2 - b_2 a_1$

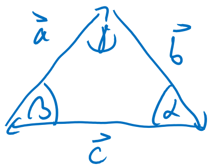
7.1 Cosinussatz und Sinussatz



$$\vec c = -\vec a + \vec b = \vec b - \vec a$$

$$\vec c^{\,2} = c^2 = (\vec b - \vec a)^2 = b^2 + a^2 - 2\vec a\vec b$$

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$$



$$\vec a + \vec b + \vec c = 0$$

$$\vec a \times \vec b = \vec a \times (0 - \vec a - \vec c) = -\vec a \times \vec a - \vec a \times \vec c =$$
$$= \vec c \times \vec a$$

andererseits $\vec a \times \vec b = (-\vec c - \vec b) \times \vec b = -\vec c \times \vec b = \vec b \times \vec c \Rightarrow$

$$\boxed{\vec a \times \vec b = \vec b \times \vec c = \vec c \times \vec a}$$

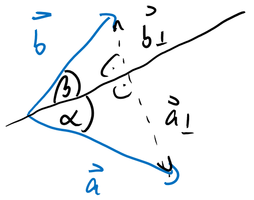
oder $ab \sin(180° - \gamma) = bc \sin(180° - \alpha) = ca \sin(180° - \beta)$

wegen $\sin(180° - \varphi) = \sin\varphi$:

$$ab \sin\gamma = bc \sin\alpha = ca \sin\beta \quad \Big| : abc$$

$$\frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{\beta} \quad \text{oder} \quad \boxed{\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}}$$

7.2 Additionstheoreme



$$\vec a \cdot \vec b = ab\cos(\alpha+\beta) = (\vec a_\parallel + \vec a_\perp)(\vec b_\parallel + \vec b_\perp) =$$
$$= a_\parallel b_\parallel - a_\perp b_\perp =$$
$$= a\cos\alpha\, b\cos\beta - a\sin\alpha\, b\cos\beta$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

$$|\vec a \times \vec b| = ab\sin(\alpha+\beta) = (\vec a_\parallel + \vec a_\perp)\times(\vec b_\parallel + \vec b_\perp) =$$
$$= a_\parallel b_\perp + a_\perp b_\parallel = ab\cos\alpha\sin\beta + ab\sin\alpha\cos\beta$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta}$$

7.3 Entwicklungssatz

$$\boxed{\vec a \times (\vec b \times \vec c) = \vec b \cdot (\vec a \cdot \vec c) - \vec c(\vec a \cdot \vec b)}$$

Vektor $\vec p = \vec a \times (\vec b \times \vec c)$ liegt in $\vec b, \vec c$-Ebene $\rightsquigarrow$ Darstellung als Linearkombination $\vec p = \beta\vec b + \gamma\vec c$

$\vec p \perp \vec a \Rightarrow \vec p\,\vec a = \beta\,\vec a\,\vec b + \gamma\,\vec a\,\vec c = 0$

Sei $\alpha := \dfrac{\beta}{\vec a\,\vec c} \Rightarrow \gamma = \dfrac{-\beta}{\vec c \cdot \vec a}\,\vec b \cdot \vec a = -\alpha\,\vec b \cdot \vec a$

$$\Rightarrow p = \beta\vec b + \gamma\vec c = \alpha\left[\vec b(\vec a \cdot \vec c) - \vec c(\vec a \cdot \vec b)\right] = \vec a \times (\vec b \times \vec c)$$

Sei $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \neq 0$ und $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq 0$

Wähle $\vec{e}_1 \parallel \vec{b}$ und $\vec{e}_2$ in $\vec{b}, \vec{c}$ Ebene

also $\vec{b} = b\,\vec{e}_1$ und $\vec{c}_1 = c_1 \vec{e}_1 + c_2 \vec{e}_2$

$\Rightarrow \vec{b} \times \vec{c} = b\,c_2\,\vec{e}_3$

$$\Rightarrow \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = b c_2 (\vec{a} \times \vec{e}_3) = b c_2 \Big(a_1 \underbrace{\vec{e}_1 \times \vec{e}_3}_{-\vec{e}_2} + a_2 \underbrace{\vec{e}_2 \times \vec{e}_3}_{\vec{e}_1} + a_3 \underbrace{\vec{e}_3 \times \vec{e}_3}_{0} \Big) =$$

$$= \begin{pmatrix} a_2 b c_2 \\ -a_1 b c_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Andererseits:

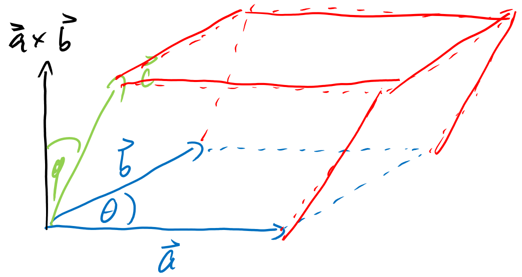
$$\alpha \left[\vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}) \right] = \alpha \left[b\vec{e}_1 (a_1 c_1 + a_2 c_2) - (c_1 \vec{e}_1 + c_2 \vec{e}_2)(a_1 b) \right] =$$

$$= \alpha \left[\vec{e}_1 \left(b \cancel{a_1 c_1} + b a_2 c_2 - \cancel{b c_1 a_1} \right) - \vec{e}_2\, c_2 a_1 b \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} a_2 b c_2 \\ a_1 b c_2 \\ 0 \end{pmatrix} \alpha \qquad \curvearrowright \qquad \alpha = 1$$

$\Rightarrow$ Entwicklungssatz $\boxed{\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})}$

7.4 Spatprodukt $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$



$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} =$$
$$= ab \sin\theta \, c \cos\varphi$$

Interpretation: Volumen = Grundfläche mal Höhe =

= Länge a · Breite b · sin θ · Höhe c cos φ

$$V = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = a_i \vec{e}_i \, \varepsilon_{jkl} b_j c_k \vec{e}_l =$$
$$= a_i b_j c_k \delta_{il} \varepsilon_{jkl} = a_l b_j c_k \varepsilon_{jkl}$$

$$\vec{e}_i \vec{e}_l = \delta_{il} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$V = \varepsilon_{jkl} b_j c_k a_l = \varepsilon_{klj} b_j c_k a_l = \varepsilon_{ljk} b_j c_k a_l =$$
$$= (\vec{b} \times \vec{c}) \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \vec{b} = (\vec{a} \times \vec{b}) c =$$

$$= -\varepsilon_{kjl} b_j c_k a_l = -\varepsilon_{lkj} b_j c_k a_l = -\varepsilon_{jlk} b_j c_k a_l$$
$$= -(\vec{c} \times \vec{b}) \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{c}) \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \vec{c}$$

8. Drehung von Vektoren (Drehmatrizen)

a) Drehung der Vektoren im festen Koordinatensystem

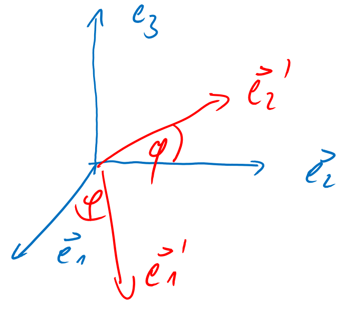
$$\vec{a} = a_i \vec{e}_i \longrightarrow \vec{a}\,' = a_i' \vec{e}_i$$

b) Drehung des Koordinatensystems

$$\vec{a} = a_i \vec{e}_i \longrightarrow \vec{a}\,' = a_i' \vec{e}_i\,' \equiv \vec{a}$$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ und $\vec{e}_1\,', \vec{e}_2\,', \vec{e}_3\,'$ sind zwei rechtshändige Koordinatensysteme mit gleichem Ursprung.

Bsp. Drehung um alte z-Achse $\vec{e}_3$ um Winkel φ.



$$\vec{e}_1\,' = \cos\varphi\, \vec{e}_1 + \sin\varphi\, \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3$$
$$\vec{e}_2\,' = -\sin\varphi\, \vec{e}_1 + \cos\varphi\, e_2 + 0\, \vec{e}_3$$
$$\vec{e}_3\,' = \vec{e}_3$$

$$\vec{a} = a_i \vec{e}_i = a_i' \vec{e}_i\,'$$

$$\vec{e}_i\,' = d_{ij} \vec{e}_j$$ Koordinatentransformation

$$\vec{e}_i\,' \vec{e}_k = d_{ij} \vec{e}_j \vec{e}_k = d_{ij} \delta_{jk} = d_{ik}$$

$$\boxed{d_{ik} = \vec{e}_i{}' \, \vec{e}_k = \cos(e_i{}' \, \vec{e}_k)}$$ Drehmatrix

$$D = (d_{ik}) = \begin{pmatrix} {}_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{\ 3} \end{pmatrix}$$

im Bsp. $(d_{ik}) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Betrachte $\vec{e}_i{}' \, \vec{e}_j{}' = d_{ik} \vec{e}_k \, d_{jl} \vec{e}_l = d_{ik} d_{jl} \underbrace{\vec{e}_k \vec{e}_l}_{\delta_{kl}} = d_{ik} d_{jk}$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{3} d_{ik} d_{jk} = \delta_{ij}$

$\Rightarrow$ Zeilenvektoren $\vec{d}_i = \begin{pmatrix} d_{i1} \\ d_{i2} \\ d_{i3} \end{pmatrix}$ bilden Orthonormalsystem wie $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$

denn $\vec{d}_i \cdot \vec{d}_j = \delta_{ij}$

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}$$ Zeilenvektor

Spaltenvektor

Bsp. $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{d}_1 \vec{d}_2 = (d_{11}, d_{12}, d_{13}) \cdot \begin{pmatrix} d_{21} \\ d_{22} \\ d_{23} \end{pmatrix} = \cos\varphi \cdot (-\sin\varphi) + \sin\varphi\cos\varphi = 0$$

$$\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_1 = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$$

Betrachte inverse Drehung : $\vec{e}_i = \tilde{d}_{ij} \vec{e}_j{}'$

$$D^{-1} = (\tilde{d}_{ij}) = \begin{pmatrix} \tilde{d}_{11} & \tilde{d}_{12} & \tilde{d}_{13} \\ \tilde{d}_{21} & \tilde{d}_{22} & \tilde{d}_{23} \\ \tilde{d}_{31} & \tilde{d}_{32} & \tilde{d}_{33} \end{pmatrix}$$

Einsetzen von $\vec{e}_j{}' = d_{jk} \vec{e}_k$

$$\vec{e}_i = \tilde{d}_{ij} d_{jk} \vec{e}_k \qquad | \cdot \vec{e}_l$$

$$\vec{e}_i \vec{e}_l = \delta_{il} = \tilde{d}_{ij} d_{jk} \vec{e}_k \vec{e}_l = \tilde{d}_{ij} d_{jk} \delta_{kl}$$

$$\Rightarrow \delta_{il} = \tilde{d}_{ij} d_{jl}$$

Spaltenvektor der Matrix D
Zeilenvektor der Matrix D^{-1}
} bilden Orthonormalsystem

Es gilt: „Neu" durch „Alt"

1. $\vec{e}_i{}' = d_{ij}\,\vec{e}_j \;\rightarrow\; \vec{e}_i{}'\,\vec{e}_k = d_{ij}\,\vec{e}_j\,\vec{e}_k = d_{ij}\,\delta_{jk} = d_{ik}$

$$\boxed{\vec{e}_i{}'\,\vec{e}_k = d_{ik}}$$

2. $\vec{e}_i = \tilde{d}_{ij}\,\vec{e}_j{}' \;\rightarrow\; \vec{e}_i\,\vec{e}_k{}' = \tilde{d}_{ij}\,\vec{e}_j{}'\,\vec{e}_k{}' = \tilde{d}_{ij}\,\delta_{jk}$

$\boxed{\vec{e}_i\,\vec{e}_k{}' = \tilde{d}_{ik}}$ oder $\boxed{\vec{e}_k\,\vec{e}_i{}' = \tilde{d}_{ki}}$ $\Rightarrow$

$= \vec{e}_i{}'\,\vec{e}_k = d_{ik}$

$$\boxed{\tilde{d}_{ki} = d_{ik}}$$

mit $D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}$ folgt $D^{-1} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ d_{12} & d_{22} & d_{32} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{pmatrix} = D^T$

transponierte Matrix

$$D^{-1} \cdot D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ d_{12} & d_{22} & d_{32} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zeilen- und Spaltenvektoren von D^{-1} und D bilden ein Orthonormalsystem

Bsp Drehung um φ um die z-Achse

$$D_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_z^{-1}(\varphi) = D_z(-\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(-\varphi) & \sin(-\varphi) & 0 \\ -\sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_z^{-1}(\varphi) = D^T(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnung der Komponenten eines Vektors im gedrehten Koordinatensystem:

$$\vec{a} = a_i \vec{e}_i \quad \longrightarrow \quad \vec{a}\,' = a_i' \vec{e}_i\,' \equiv \vec{a}$$

$$\vec{e}_i\,' = d_{ij} \vec{e}_j = \sum_{j=1}^{3} d_{ij} \vec{e}_j$$

Koordinatentransformation

$$\vec{a}\,' = \sum_{i=1}^{3} a_i' \vec{e}_i\,' = \vec{a} = \sum_{j=1}^{3} a_j \vec{e}_j \quad \Big| \cdot \vec{e}_j$$

$$\sum_{i=1}^{3} a_i' \underbrace{\vec{e}_i\,' \vec{e}_j}_{d_{ij} = \cos(\vec{e}_i\,', \vec{e}_j)} = \vec{a} \cdot \vec{e}_j = a_j$$

$$\boxed{a_j = \sum_{i=1}^{3} a_i' d_{ij}}$$

Bestimmung von a_j aus a_i' im gedrehten Koord. system

Umgekehrt:

$$\vec{a}\,' = \sum_{i=1}^{3} \vec{a}_i\,' \vec{e}_i\,' = \vec{a} = \sum_{j=1}^{3} a_j \vec{e}_j \qquad \Big| \cdot \vec{e}_i\,'$$

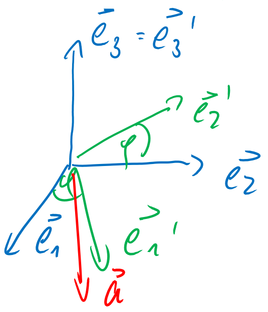
$$a_i\,' = \sum_{j=1}^{3} a_j \underbrace{\vec{e}_j \vec{e}_i\,'}_{\tilde{d}_{ji} = d_{ij}}$$

$$a_i' = \sum_{j=1}^{3} a_j \tilde{d}_{ji} = \boxed{\sum_{j=1}^{3} a_j d_{ij} = a_i'}$$

Bestimmung von a_j' aus Komponenten a_i von $\vec{a}$

Bsp.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{wobei } \varphi = 45°$$



$$D = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}\,' = (d_{ij}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

9. Matrizen und Determinanten

Def.:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{i=1\ldots m \\ j=1\ldots n}}$$

$n \times m$ Matrix mit n Zeilen und m Spalten

- quadratische Matrix $n = m$
- diagonale Matrix $a_{ij} = 0 \ \forall i \neq j \Leftrightarrow a_{ij} = \delta_{ij} a_i = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ 0 & & \ddots \ a_k \end{pmatrix}$

- Einheitsmatrix $\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \ ; \ e_{ij} = \delta_{ij}$

i-ter Zeilenvektor $(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{im})$ ist $(1 \times m)$-Matrix

j-ter Spaltenvektor $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ ist $(n \times 1)$-Matrix

- Zeilenrang: Anzahl der linear unabhängigen Zeilenvektoren
- Spaltenrang: " " Spaltenvektoren

Es gilt Zeilenrang = Spaltenrang = Rang einer Matrix
(ohne Beweis)

<u>Bsp.</u> $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Zeilenrang = 2, denn $\alpha_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$ nur für $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

Spaltenrang = 2, denn $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$ und

$\beta_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$ nur für $\beta_1 = \beta_2 = 0$

9.1 Rechenregeln für Matrizen

- Skalare Multiplikation $A = (a_{ij})$; $\lambda \in \mathbb{R}$
  $\lambda \cdot A = (\lambda a_{ij})$

- Addition von Matrizen: $A = (a_{ij})$; $B = (b_{ij})$ sind $n \times m$ Matrizen
  $C = A + B = (c_{ij})$ mit $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$; C ist $n \times m$ Matrix

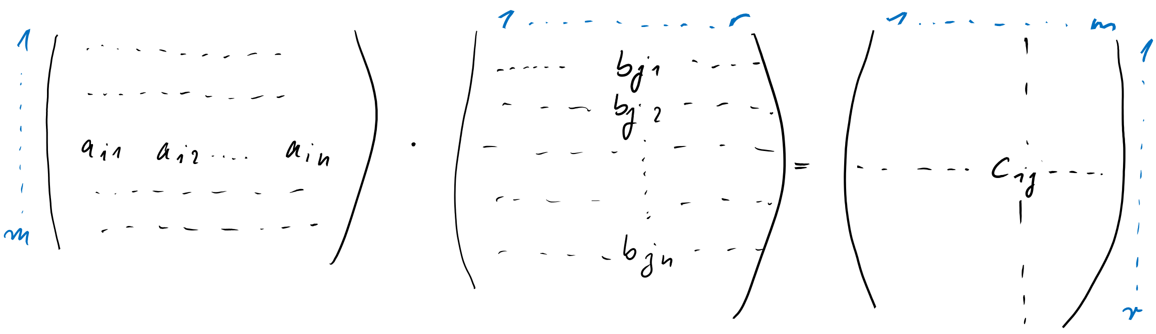
- Multiplikation von Matrizen: $A = (a_{ij})$ $m \times n$ - Matrix
  $B = (b_{ij})$ $n \times r$ - Matrix

Spaltenzahl von A = Zeilenzahl von B

$\Rightarrow C = A \cdot B = (c_{ij})$ ist $m \times r$ - Matrix mit

$$c_{ij} = a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

c_{ij} ist Skalarprodukt des i-ten Zeilenvektors von A mit dem j-ten Spaltenvektor von B



Allgemein gilt $A \cdot B \neq B \cdot A$ also $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \neq \sum_{j=1}^{n} b_{ij} a_{jk}$

Im Folgenden werden nur quadratische Matrizen betrachtet.

- Symmetrische Matrizen : $A = (a_{ij})$ mit $a_{ij} = a_{ji}$
- Transponierte Matrix : $A = (a_{ij}) \curvearrowright A^T = (\tilde{a}_{ij}) = (a_{ji})$
- Inverse Matrix : $A = (a_{ij}) \curvearrowright A^{-1} \cdot A = E = (\delta_{ij})$

Für Drehmatrizen gilt $D^{-1} = D^T \Rightarrow D^T \cdot D = E$

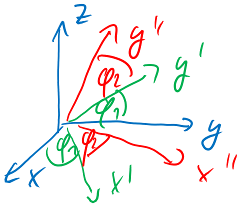
Bsp. Betrachte 2 Drehungen nacheinander um φ_1 bzw. φ_2 jeweils um die z-Achse

$$D_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 & 0 \\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } D_2 = \begin{pmatrix} \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 & 0 \\ -\sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Gesamtdrehung $D = D_2 \cdot D_1 =$

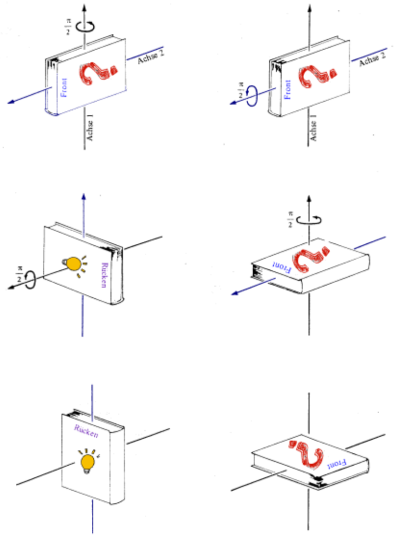
$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi_2\cos\varphi_1 - \sin\varphi_2\sin\varphi_1 & \cos\varphi_2\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2\cos\varphi_1 & 0 \\ -\sin\varphi_2\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2\sin\varphi_1 & -\sin\varphi_2\sin\varphi_1 + \cos\varphi_2\cos\varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1+\varphi_2) & \sin(\varphi_1+\varphi_2) & 0 \\ -\sin(\varphi_1+\varphi_2) & \cos(\varphi_1+\varphi_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Drehwinkel addieren sich!

Drehung um verschiedene Achsen:



„2 nach 1"

$D_{gesamt} = D_2 \cdot D_1$

$D_2 \cdot D_1 \neq D_1 \cdot D_2$

↪ Reihenfolge der Drehungen beachten!

9.2 Determinanten

Hilfsmittel zur Lösung linearer Gleichungssysteme, zur Berechnung der inversen Matrix

Determinante von $A = (a_{ij})$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + \dots + a_{1n}A_{1n}$$

wobei A_{kl} die Unterdeterminante ist mit

$$A_{kl} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kl} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{ml} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Streichen der k-ten Zeile und der l-ten Spalte aus $|A|$

Bsp.:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{32} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} -$$
$$- a_{12}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$
$$+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Rechenschema: Jeder Summand besteht aus 3 Faktoren
" erhält aus jeder Zeile genau einen Faktor
" Spalte "

Es treten alle Permutationen (Vertauschungen) auf ; $3! = 6$

Vertauschung der Indizes im Produkt $a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot a_{3j_3}$ geht aus der natürlichen Reihenfolge 1, 2, 3 aus einer geraden oder ungeraden Anzahl von Vertauschungen hervor: Vorzeichen $(-1)^p$

Definition der Determinante:

$$\boxed{|A| := \sum_p (-1)^p \, a_{1j_1} \, a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}}$$

Summation über alle $n!$ Permutationen von $j_1 \, j_2 \cdots j_n$ der Spaltenindizes

Sarrus'sche Regel ($n=3$):

$$|a_{ij}| = + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Entwicklungssatz von Laplace:

Entwicklung von $|A|$ nach der j-ten Spalte

$$\mathrm{Det}(A) = |A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij}$$ mit Unterdeterminante A_{ij}

Entwicklung nach der i-ten Zeile:

$$\mathrm{Det}(A) = |A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij}$$

$$U_{ij} := (-1)^{i+j} A_{ij} \qquad \text{„algebraisches Komplement"}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Unterdeterminante

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A)$$

Nutzen: Entwicklung sinnvollerweise nach Spalte oder Zeile mit den meisten Nullen.

9.3 Rechenregeln für Determinanten

- Multiplikation einer Zeile:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}$$

$$|(\lambda a_{ij})| = \lambda^n |a_{ij}|$$

- Addition einer Zeile:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}$$

- Vertauschen benachbarter Zeilen $\Rightarrow$ Vorzeichenwechsel
  folgt aus Entwicklungssatz wegen $(-1)^{i+j}$

- Sind 2 Zeilen identisch, dann $|A| = 0$
  vertausche benachbarte Zeilen solange, bis identische Zeilen benachbart sind, vertausche diese $\Rightarrow$ $|A| = -|A| = 0$

- Addition von Zeilen
  Eine Determinante ändert sich nicht, wenn man die mit λ multiplizierten Glieder einer Reihe zu einer parallelen Reihe addiert

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda a_{21} & a_{12} + \lambda a_{22} + \cdots & a_{1n} + \lambda a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} \quad a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- Multiplikationstheorem $\quad |A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

- Transponierte Matrix: $\quad |A^T| = |A|$

- Dreiecksmatrix:
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & 0 & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$

folgt aus Entwicklungssatz für die letzte Zeile, der $(n-1)$-fach angewandt wird.

- Einheitsmatrix $\begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots & 1 \end{vmatrix} = 1$

- Inverse Matrix $A^{-1} \cdot A = E$

  $|A^{-1}| \cdot |A| = |E| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

Umkehrung (ohne Beweis):
Falls $|A| \neq 0$ existiert A^{-1}, sodaß $A^{-1}A = E$

10 Krummlinige Koordinaten

Betrachte Ortsvektor $\vec{r}$ im kartesischen, ortsunabhängigen Koordinatensystem: $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$

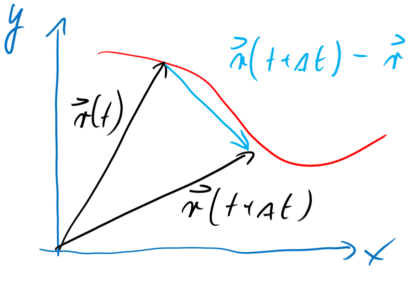
$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad ; |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Sei $\vec{r}(t)$ eine Bahnkurve

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z$$

dann ergibt sich durch Ableitung nach der Zeit die Geschwindigkeit $v(t)$:

$$\frac{d}{dt}\left(r(t)\right) := \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z \quad ; \vec{e}_i \text{ ortsunabhängig (konstant)}$$



Differentiation:

$$\frac{d\vec{r}}{dt}(t) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} =$$

$$= \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

Analog für Beschleunigung $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

Umkehrung: Integration

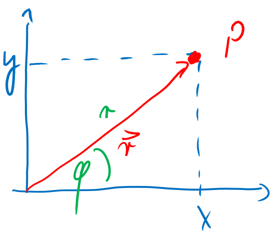
$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t d\tau\, \vec{v}(\tau) \quad \text{mit}$$

$$\int_0^t v(\tau)\, d\tau = \vec{e}_x \int_0^t v_x(\tau)\, d\tau + \vec{e}_y \int_0^t v_y(\tau)\, d\tau + \vec{e}_z \int_0^t v_z(\tau)\, d\tau$$

und $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(\tau)\, d\tau$

10.1 Ebene Polarkoordinaten

Transformationsgleichungen: $\begin{aligned} x &= r \cdot \cos\varphi \\ y &= r \cdot \sin\varphi \end{aligned}$ mit $0 < r < \infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$



Umkehrung:

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

Betrachte gleichförmige Kreisbewegung:

$r(t) = r_0 = \text{const}$ und $\varphi(t) = \omega t$ (einfache Darstellung)

↖ konstante Winkelgeschwindigkeit

Betrachte gleichförmig geradlinige Bewegung: $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}t$

$x(t) = r_0 \cos\varphi_0 + vt \cos\alpha$

$y(t) = r_0 \sin\varphi_0 + vt \sin\alpha$

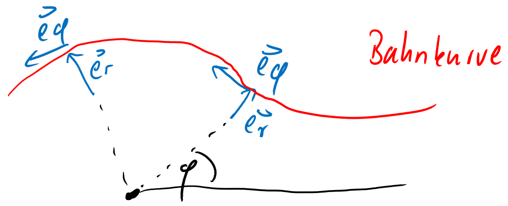
$$r(t) = \left(r_0^2 + 2vt r_0 \cos(\alpha - \varphi_0) + v^2 t^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\varphi(t) = \arctan \left(\frac{vt \sin\alpha + r_0 \sin\varphi_0}{vt\cos\alpha + r_0 \cos\varphi_0} \right)$$

(komplizierte Darstellung)

$\rightsquigarrow$ Wähle Koordinatensystem so, daß Darstellung möglichst einfach!

10.2 Ortsabhängige Basisvektoren



$\vec{r} = r\cos\varphi\, \vec{e}_x + r\sin\varphi\, \vec{e}_y$

Koordinatentransformation:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{e}_r &= \cos\varphi\, \vec{e}_x + \sin\varphi\, \vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi &= -\sin\varphi\, \vec{e}_x + \cos\varphi\, \vec{e}_y \end{aligned}}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \end{pmatrix}$$

Umgekehrt: $\quad T^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{e}_x &= \cos\varphi\, \vec{e}_r - \sin\varphi\, \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_y &= \sin\varphi\, \vec{e}_r + \cos\varphi\, \vec{e}_\varphi \end{aligned}}$$

lokale Basis $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi$

Betrachte $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}\left(r \cdot \vec{e}_r \right) = \left(\frac{d}{dt} r \right) \vec{e}_r + r \left(\frac{d}{dt} \vec{e}_r \right) = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\vec{e}}_r$

$$\frac{d}{dt}\vec{e}_r = \underset{\text{const}}{\vec{e}_x} \cdot \frac{d}{dt}\cos(\varphi(t)) + \vec{e}_y \frac{d}{dt}\sin(\varphi(t)) =$$

$$= \vec{e}_x\,(-\sin\varphi(t))\,\dot{\varphi}(t) + \vec{e}_y\cos(\varphi(t))\cdot\dot{\varphi}(t) =$$

$$= \dot{\varphi}(-\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y) = \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

Gleichförmige Kreisbewegung: $\dot{r} = 0$, $\dot{\varphi} = \omega$ ← Winkelgeschwindigkeit

$$\Rightarrow \vec{v} = r\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega\,\vec{e}_z$; $\vec{e}_z \times \vec{e}_r = \vec{e}_\varphi$

$$\Rightarrow \vec{v} = r\omega\,\vec{e}_z \times \vec{e}_r = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Allgemein für $\dot{r} \neq 0$: $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + \vec{\omega}\times\vec{r}$

Ebenso ergibt sich $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi) =$

$$= \ddot{r}\vec{e}_r + \underbrace{\dot{r}\dot{\vec{e}}_r}_{\dot{r}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi} + \dot{r}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \underbrace{r\dot{\varphi}\dot{\vec{e}}_\varphi}_{-r\dot{\varphi}^2\vec{e}_r} =$$

$\dot{\vec{e}}_\varphi = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix}-\sin\varphi \\ \cos\varphi\end{pmatrix} = -\dot{\varphi}\vec{e}_r$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi$$

Radialbeschleunigung $\ddot{r}$; Radialkomponente d. Beschleunigung $\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$

Gleichförmige Kreisbewegung: $\dot{r} = \ddot{r} = 0$; $\dot{\varphi} = \omega$; $\ddot{\varphi} = 0$

$$\vec{a} = -r\dot{\varphi}^2 \vec{e}_r$$

$$\vec{a} = -r\omega^2 \vec{e}_r$$

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

Zentripetalbeschleunigung! Beschleunigung $\perp$ Geschwindigkeit

Beschreibung in krummlinigen Koordinaten sinnvoll.

10.3 Zylinderkoordinaten

$$(x, y, z) \to (r, \varphi, z)$$

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$z = z$$

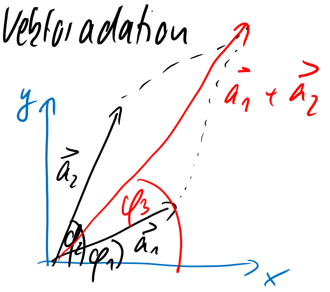
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ; \quad \varphi = \begin{cases} \arccos\frac{x}{r} & \text{für } x \geq 0 ; r > 0 \\ 2\pi - \arccos\frac{x}{r} & \text{für } x < 0 ; r > 0 \\ \text{beliebig} & \text{für } r = 0 \end{cases}$$

Rechnen mit Zylinderkoordinaten

$\vec{a}_1 = (r_1, \varphi_1, z_1)$ und $\vec{a}_2 = (r_2, \varphi_2, z_2)$

Kartesische Basis $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} r_1\cos\varphi_1 \\ r_1\sin\varphi_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$; $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} r_2\cos\varphi_2 \\ r_2\sin\varphi_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$

- Vektoraddition



$\varphi_3 \neq \varphi_1 + \varphi_2$

- Skalare Multiplikation : $\lambda \in \mathbb{R}$; $\vec{a} = (r, \varphi, z)$

$\lambda \cdot \vec{a} = (\lambda r, \varphi, \lambda z)$

- Skalarprodukt : $\vec{a}_1 = (r_1, \varphi_1, z_1)$; $\vec{a}_2 = (r_2, \varphi_2, z_2)$

$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = r_1 r_2 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \vec{e}_r^{\,2} + r_1 r_2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \vec{e}_\varphi^{\,2} + z_1 z_2 \vec{e}_z^{\,2} =$

$= r_1 r_2 (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + z_1 z_2 =$

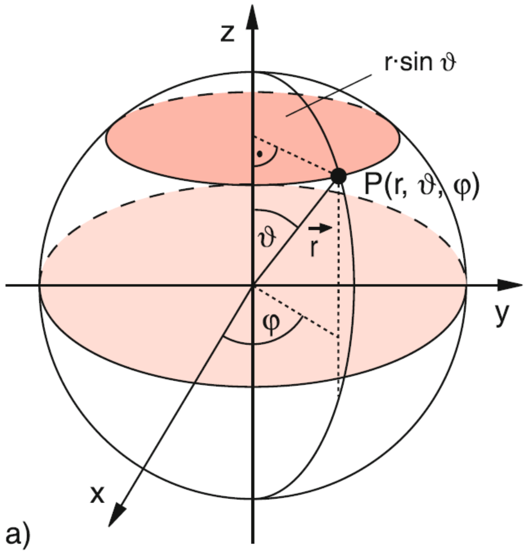
$= r_1 r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + z_1 z_2$

$|\vec{a}| = \sqrt{r^2 + z^2}$; $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a}_1 \vec{a}_2}{|\vec{a}_1||\vec{a}_2|} = \dfrac{r_1 r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + z_1 z_2}{\sqrt{r_1^2 + z_1^2}\sqrt{r_2^2 + z_2^2}}$

$\Rightarrow \alpha \neq \varphi_2 - \varphi_1$ (außer für $z = 0$)

↪ Rechnen mit krummlinigen Koordinaten (lokale Basis) oft mühsam

10.4 Polarkoordinaten (Kugelkoordinaten):



Demtröder, Experimentalphysik 1

Bsp. Kugeloberfläche (Erde)

Koordinaten φ, ϑ

„Länge": $-180° \leq \varphi \leq 180°$

östliche bzw. westliche Länge

„Breite": $-90° \leq \vartheta \leq 90°$

südliche bzw. nördliche Breite

$\vec{a} = (r, \varphi, \vartheta)$ mit $0 \leq r < \infty$

Azimuthwinkel $0 \leq \varphi < 2\pi$

Polarwinkel $0 \leq \vartheta < \pi$

$x = r \sin\vartheta \cos\varphi$

$y = r \sin\vartheta \sin\varphi$

$z = r \cos\vartheta$

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; $\vartheta = \arccos \frac{z}{r}$ für $r > 0$

$$\varphi = \begin{cases} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } y < 0 \end{cases}$$

↝ Gleiche Problematik wie bei Zylinderkoordinaten

Winkel zwischen Vektoren i. A. nicht $\varphi_2 - \varphi_1$ bzw. $\vartheta_2 - \vartheta_1$

↝ Berechnen mit Skalarprodukt

Aber: oft vereinfachte Darstellung

z. B. Gravitationsfeld einer Punktmasse (Zentralkraftfeld)

$\vec{F} = m\,\vec{G}(\vec{r})$ mit $\vec{G}(\vec{r}) = -\frac{\gamma M}{r^2}\,\vec{e}_r$

Kraftfeld einer Punktladung $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2}\,\vec{e}_r$